

5.1. Linearno programiranje

Metode matematičkog optimiranja

Linearno programiranje

Struktura modela linearnog programiranja

Primjeri optimiranja primjenom Simplex algoritma:

- Optimiranje dobiti i sastava smjese sirovina
- Optimiranje sastava i troškova za pripremu obroka
- Optimiranje jelovnika za studente

Linearno programiranje

Linearno programiranje je
rješavanje matematičkog zadatka
s ciljem optimiranja vrijednosti *linearne funkcije cilja*
čije varijable zadovoljavaju *sustav ograničenja*
koji je zadan linearnim jednadžbama i/ili nejednadžbama.

Modeli linearnog programiranja

predstavljani su linearnim jednadžbama i nejednadžbama
od kojih neke predstavljaju funkciju cilja, a neke ograničenja.



Primjene metode linearnog programiranja u nutricionizmu:

- optimiranje dobiti i sastava smjese sirovina
- optimiranje sastava i troškova za pripremu obroka
- optimiranje jelovnika

Općenito:

Temelji se na „Simplex” algoritmu.

Optimira modele sustava koji su u stacionarnom stanju.

SIROVINA	MASNOĆA (%)	PEPEO (%)	CIJENA (kn/kg)
S ₁	0,08	0,02	1,8
S ₂	0,12	0,035	3,15

Namirnica		Bjelančevine		Masnoće	Ugljikohidrati	Cijena
		Životinjske	Biljne			(kn/kg)
x1	mast			1,00		10,0
x2	ulje			1,00		12,0
x3	meso	0,20		0,08		30,0
x4	mlijeko	0,03		0,04	0,05	6,0
x5	šećer				1,00	7,0
x6	riža		0,08	0,02	0,78	5,0
x7	brašno		0,12	0,02	0,72	4,0
x8	grah		0,24	0,02	0,47	15,0
x9	krumpir		0,02		0,19	2,0

Komponente obroka	Varijable	Energija (kJ)	Proteini (g)	Masti (g)	Ca (mg)	Fe (mg)	Vit. C (mg)	Cijena (kn)
Doručak 1 <i>Cornflakes, mlijeko</i>	d1	2050	6	3	350	4	3	3,0
Doručak 2 <i>pašteta, kruh, kakao</i>	d2	2136	8	7	369	6	2	3,8
Juha 1 <i>juha od rajčice</i>	x1	836	7	5	92	3	9	2,7
Juha 2 <i>juha od povrća</i>	x2	820	4	6	63	3	15	2,7
Prilog 1 <i>riža</i>	x3	1797	6	4	51	1	35	4,5
Prilog 2 <i>krumpir pire</i>	x4	1987	6	6	13	-	-	5,1
Govedina u umaku	x5	2430	20	29	60	5	10	5,7
Pljeskavica	x6	2900	28	39	34	2	5	6,9
Desert 1 <i>naranča</i>	x7	526	1	-	63	1	77	0,6
Desert 2 <i>puding</i>	x8	883	3	3	31	-	-	1,2
Desert 3 <i>kompot</i>	x9	1053	2	5	18	1	22	1,8
Desert 4 <i>pita od sira</i>	x10	2160	21	6	84	3	-	2
Večera 1 <i>hrenovke, kruh, senf</i>	v1	2898	12	16	25	2	3	5,6
Večera 2 <i>krafne, jogurt</i>	v2	2299	6	13	554	3	1	4,5

Struktura modela linearnog programiranja

Model linearnog programiranja čine:

model funkcije cilja

(Fc)

i

model ograničenja

(<, <=, =, >=, >)

- **Simplex metoda** (G. Dantzig, 1947. G)

Model funkcije cilja (linearni):

$$Fc = \underline{c_1} \cdot x_1 + \underline{c_2} \cdot x_2 + \dots + \underline{c_N} \cdot x_N \quad (\text{MIN / MAX})$$

Model ograničenja (linearni):

oblika \leq

$$a_{i,1} \cdot x_1 + a_{i,2} \cdot x_2 + \dots + a_{i,N} \cdot x_N \leq b_i$$

oblika $=$

$$a_{j,1} \cdot x_1 + a_{j,2} \cdot x_2 + \dots + a_{j,N} \cdot x_N = b_j$$

oblika \geq

$$a_{M,1} \cdot x_1 + a_{M,2} \cdot x_2 + \dots + a_{M,N} \cdot x_N \geq b_M$$

$$x_i \geq 0$$

M = broj ograničenja

N = broj varijabli

Ograničenja određuju skup dopustivih rješenja (n-terokut).

MODEL
FUNKCIJE
CILJA

EKONOMSKI UVJETI

*(cijene: sirovina, proizvoda, energije,
radne snage i kapitala)*

TEHNOLOŠKI UVJETI

*(iskoristivost tehnoloških kapaciteta,
sirovina i tržišta)*

KAKVOĆA PROIZVODA

(nutritivna i senzorska svojstva)

**MODEL
OGRANIČENJA**

EKONOMSKA OGRANIČENJA

*(ograničenost finansijskih sredstava,
raspoloživih sirovina i tržišta)*

TEHNOLOŠKA OGRANIČENJA

*(ograničenost tehnoloških postrojenja,
raspoloživost energije i radne snage)*

KAKVOĆA PROIZVODA

(standardi proizvoda i proizvodnje - ISO)

UTJECAJ NA OKOLIŠ

(kemijski i biološki utjecaj na okoliš)



Primjer 1.

Optimiranje dobiti i sastava smjese sirovina

SIROVINA	MASNOĆA (%)	PEPEO (%)	CIJENA (kn/kg)
S_1	0,08	0,02	1,8
S_2	0,12	0,035	3,15

Prodajna cijena smjese je 4,5 kn/kg.

MODEL FUNKCIJE CILJA

$F_{C \text{ MAX}} = \text{dobit} = \text{prodajna cijena} - \text{troškovi}$

(maksimum funkcije cilja)

$$F_{C \text{ MAX}} = 4,5 \cdot (S_1 + S_2) - (1,8 \cdot S_1 + 3,15 \cdot S_2) =$$

$$4,5 \cdot S_1 + 4,5 \cdot S_2 - 1,8 \cdot S_1 - 3,15 \cdot S_2$$

$$F_{C \text{ MAX}} = \mathbf{2,7 \cdot S_1 + 1,35 \cdot S_2}$$

OGRANIČENJA

Pepeo $\leq 0,03\%$

Masnoća $\geq 0,1\%$

Zalihe:

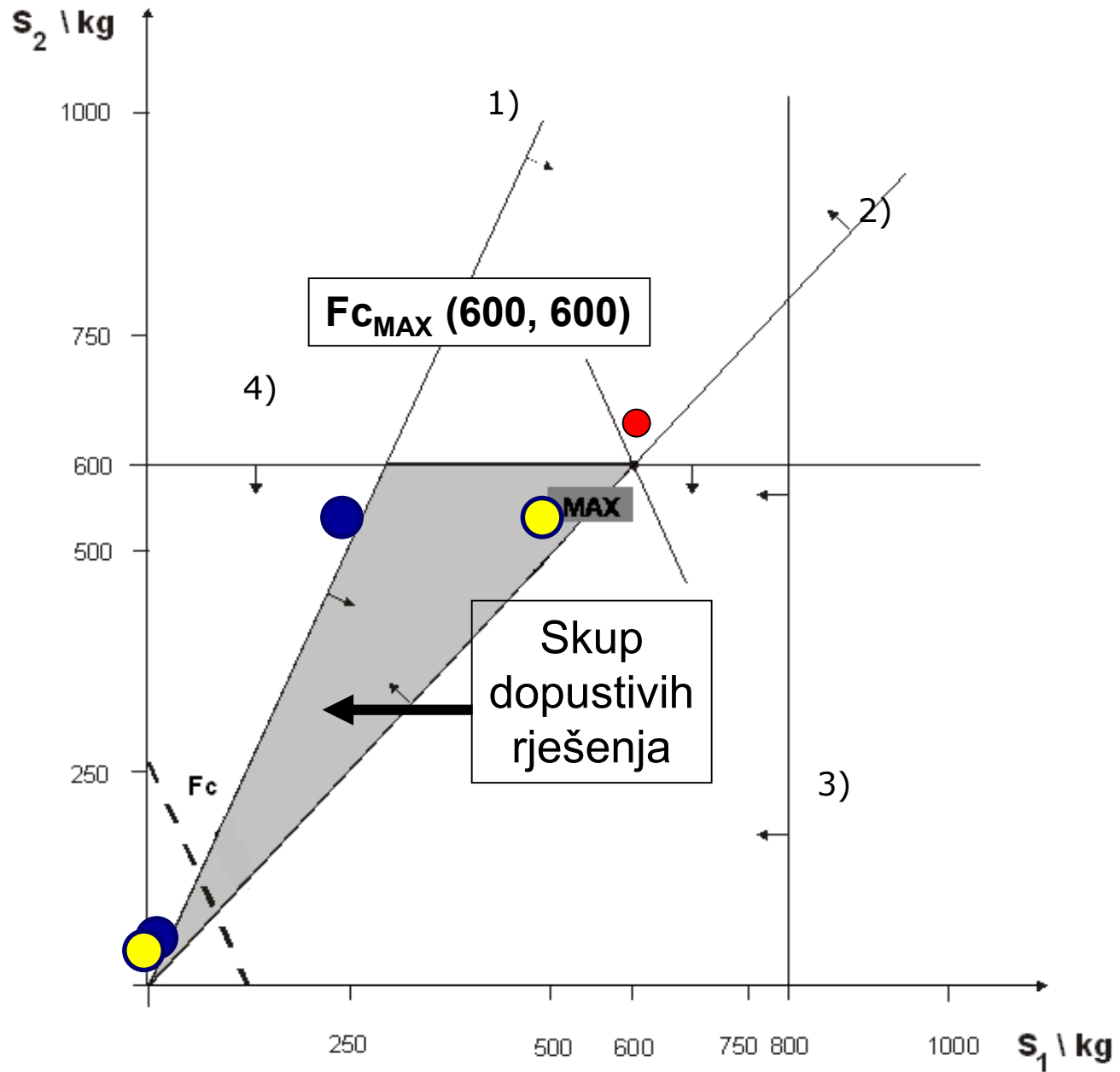
$S_1 \leq 800$

$S_2 \leq 600$

MODEL OGRANIČENJA

- $$0,02 \cdot S_1 + 0,035 \cdot S_2 \leq 0,03(S_1 + S_2)$$
$$0,02 \cdot S_1 - 0,03 \cdot S_1 + 0,035 \cdot S_2 - 0,03 \cdot S_2 \leq 0$$
$$-0,01 \cdot S_1 + 0,005 \cdot S_2 \leq 0 \quad / \cdot (-200)$$
$$\mathbf{2 \cdot S_1 - S_2 \geq 0} \quad (S_1 \geq 0, S_2 = 0; S_1 \geq 250, S_2 = 500)$$
- $$0,08 \cdot S_1 + 0,12 \cdot S_2 \geq 0,1(S_1 + S_2)$$
$$0,08 \cdot S_1 - 0,1S_1 + 0,12 \cdot S_2 - 0,1 \cdot S_2 \geq 0$$
$$-0,02 \cdot S_1 + 0,02 \cdot S_2 \geq 0 \quad / \cdot (-50)$$
$$\mathbf{S_1 - S_2 \leq 0} \quad (S_1 = 0, S_2 \geq 0; S_1 = 500, S_2 \geq 500)$$
- $$\mathbf{S_1 \leq 800} \quad (S_1 \leq 800, S_2 = 0; S_1 \leq 800, S_2 = 500)$$
- $$\mathbf{S_2 \leq 600} \quad (S_1 = 0, S_2 \leq 600; S_1 = 500, S_2 \leq 600)$$

GRAFIČKO RJEŠAVANJE ZADATKA



$$\begin{aligned} F_{C \text{ MAX}} &= 2,7 \cdot S_1 + 1,35 \cdot S_2 = 2,7 \cdot \underline{600} + 1,35 \cdot \underline{600} \\ &= 2430 \text{ kn} / 1200 \text{ kg} \\ &= \mathbf{2,025 \text{ kn/kg}} \end{aligned}$$

ZAKLJUČAK:

Optimalan sastav smjese sirovina S_1 i S_2 , koji zadovoljava sva ograničenja bit će pripremljen sa 600 kg sirovine S_1 i 600 kilograma sirovine S_2 .

Pri takvom sastavu moguće je prodajom ostvariti maksimalnu dobit od 2430 kn za 1200 kg smjese što je 2,025 kn/kg prodane smjese.

Primjer korištenja računalnog programa LINDO ver. 6.0 !

LINDO ver. 6.0

(LINDO Systems, Inc. , Chicago, USA)

MAX 2.7S1+1.35S2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) **2430.000**

SUBJECT TO

2S1-S2>=0

S1-S2<=0

S1<=800

S2<=600

END

VARIABLE

VALUE

S1

600.000000

S2

600.000000



Primjer 2.

Optimiranje sastava i troškova za pripremu obroka

Namirnica		Bjelančevine		Masnoće	Ugljikohidrati	Cijena (kn/kg)
		Životinjske	Biljne			
x1	mast			1,00		10,0
x2	ulje			1,00		12,0
x3	meso	0,20		0,08		30,0
x4	mlijeko	0,03		0,04	0,05	6,0
x5	šećer				1,00	7,0
x6	riža		0,08	0,02	0,78	5,0
x7	brašno		0,12	0,02	0,72	4,0
x8	grah		0,24	0,02	0,47	15,0
x9	krumpir		0,02		0,19	2,0

MODEL FUNKCIJE CILJA

$$F_{C_{\text{MIN}}} = 10 \cdot x_1 + 12 \cdot x_2 + 30 \cdot x_3 + 6 \cdot x_4 + 7 \cdot x_5 + 5 \cdot x_6 + 4 \cdot x_7 + 15 \cdot x_8 + 2 \cdot x_9$$

OGRANIČENJA

- Minimalna količina mesa u obroku smije biti 0.3 kg
- Minimalna količina bjelančevina životinjskog podrijetla mora biti 0.028 kg
- Minimalna količina bjelančevina biljnog podrijetla mora biti 0.037 kg
- Minimalna količina ugljikohidrata mora biti 0.424 kg
- Maksimalna količina masnoća smije biti 0.1 kg

MODEL OGRANIČENJA

$$1) \quad x_3 \geq 0.3$$

$$2) \quad 0.2 x_3 + 0.03 x_4 \geq 0.028$$

$$3) \quad 0.08 x_6 + 0.12 x_7 + 0.24 x_8 + 0.02 x_9 \geq 0.037$$

$$4) \quad 0.05 x_4 + x_5 + 0.78 x_6 + 0.72 x_7 + 0.48 x_8 + 0.19 x_9 \geq 0.424$$

$$5) \quad x_1 + x_2 + 0.08 x_3 + 0.04 x_4 + 0.02 x_6 + 0.02 x_7 + 0.02 x_8 \leq 0.1$$

Primjer korištenja računalnog programa LINDO ver. 6.0 !

! Optimiranje sastava obroka

MIN $10X_1 + 12X_2 + 30X_3 + 6X_4 + 7X_5 + 5X_6 + 4X_7 + 15X_8 + 2X_9$

SUBJECT TO

$0X_1 + 0X_2 + 1X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0X_6 + 0X_7 + 0X_8 + 0X_9 \geq 0.3$

$0X_1 + 0X_2 + 0.2X_3 + 0.03X_4 + 0X_5 + 0X_6 + 0X_7 + 0X_8 + 0X_9 \geq 0.028$

$0X_1 + 0X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0.08X_6 + 0.12X_7 + 0.24X_8 + 0.02X_9 \geq 0.037$

$1X_1 + 1X_2 + 0.08X_3 + 0.04X_4 + 0X_5 + 0.06X_6 + 0.02X_7 + 0.02X_8 + 0X_9 \leq 0.1$

$0X_1 + 0X_2 + 0X_3 + 0.05X_4 + 1X_5 + 0.78X_6 + 0.72X_7 + 0.48X_8 + 0.19X_9 \geq 0.424$

END

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 4

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

Funkcija cilja (MIN) = 11.35556

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	0.000000	10.000000
X2	0.000000	12.000000
X3	0.300000	0.000000
X4	0.000000	5.722222
X5	0.000000	1.444444
X6	0.000000	0.777778
X7	0.588889	0.000000
X8	0.000000	12.333333
X9	0.000000	0.944444

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	-30.000000
3)	0.032000	0.000000
4)	0.033667	0.000000
5)	0.064222	0.000000
6)	0.000000	-5.555555

NO. ITERATIONS= 4

ZAKLJUČAK:

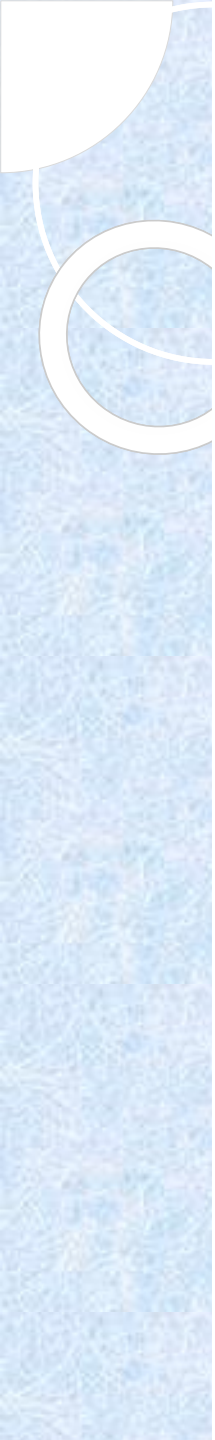
Optimalan obrok, koji po svom sastavu zadovoljava sva zadana ograničenja, sastoji se od 300 g mesa i 589 g brašna.

Najniža cijena za pripremu 889 g obroka je 11,35556 kn.

NAPOMENA:

Algoritam je odredio sva matematička rješenja koja zadovoljavaju postavljena ograničenja i odabrao rješenje s najnižom vrijednošću Funkcije cilja.

Sastav obroka i organoleptička svojstva nisu bila uvjetovana !



Primjer 3.

Optimiranje jelovnika za studente

Komponente obroka	Varijable	Energija (kJ)	Proteini (g)	Masti (g)	Ca (mg)	Fe (mg)	Vit. C (mg)	Cijena (kn)
Doručak 1 <i>Cornflakes, mlijeko</i>	d1	2050	6	3	350	4	3	3,0
Doručak 2 <i>pašteta, kruh, kakao</i>	d2	2136	8	7	369	6	2	3,8
Juha 1 <i>juha od rajčice</i>	x1	836	7	5	92	3	9	2,7
Juha 2 <i>juha od povrća</i>	x2	820	4	6	63	3	15	2,7
Prilog 1 <i>riža</i>	x3	1797	6	4	51	1	35	4,5
Prilog 2 <i>krumpir pire</i>	x4	1987	6	6	13	-	-	5,1
Govedina u umaku	x5	2430	20	29	60	5	10	5,7
Pljeskavica	x6	2900	28	39	34	2	5	6,9
Desert 1 <i>naranča</i>	x7	526	1	-	63	1	77	0,6
Desert 2 <i>puding</i>	x8	883	3	3	31	-	-	1,2
Desert 3 <i>kompot</i>	x9	1053	2	5	18	1	22	1,8
Desert 4 <i>pita od sira</i>	x10	2160	21	6	84	3	-	2
Večera 1 <i>hrenovke, kruh, senf</i>	v1	2898	12	16	25	2	3	5,6
Večera 2 <i>krafne, jogurt</i>	v2	2299	6	13	554	3	1	4,5

OGRANIČENJA

(prema RDA preporukama)

Maksimalna količina masti	(Ž: 70 g;	M: 96 g)
Minimalna količina energije u jelovniku	(Ž: 8280 kJ;	M: 10915 kJ)
Maksimalna količina energije u jelovniku	(Ž: 10120 kJ;	M: 13340 kJ)
Minimalna količina proteina	(Ž: 46 g;	M: 58 g)
Minimalna količina kalcija	(Ž: 1100 mg	M: 1100 mg)
Minimalna količina željeza	(Ž: 15 mg;	M: 10 mg)
Minimalna količina vitamina C	(Ž: 60 mg;	M: 60 mg)
Od dva ponuđena doručka treba izabrati samo jedan	$(d_1 + d_2 = 1)$	
Od dvije ponuđene juhe treba izabrati samo jednu	$(x_1 + x_2 = 1)$	
Od dva ponuđena priloga treba izabrati samo jedan	$(x_3 + x_4 = 1)$	
Od dva glavna jela treba izabrati samo jedno	$(x_5 + x_6 = 1)$	
Od četiri ponuđena deserta treba izabrati samo jedan	$(x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 1)$	
Od dvije ponuđene večere treba izabrati samo jednu	$(v_1 + v_2 = 1)$	
Varijable trebaju biti cijeli brojevi	(integer)	

MIN

$3.0d_1+3.8d_2+2.7x_1+2.7x_2+4.5x_3+5.1x_4+5.7x_5+6.9x_6+0.6x_7+1.2x_8+1.8x_9+2x_{10}+5.6v_1+4.5v_2$

SUBJECT TO

$3d_1+7d_2+5x_1+6x_2+4x_3+6x_4+29x_5+39x_6+3x_8+5x_9+6x_{10}+16v_1+13v_2 \leq 70$

$2050d_1+2136d_2+836x_1+820x_2+1797x_3+1987x_4+2430x_5+2900x_6+526x_7+883x_8+1053x_9+2160x_{10}+2898v_1+2299v_2 \geq 8280$

$2050d_1+2136d_2+836x_1+820x_2+1797x_3+1987x_4+2430x_5+2900x_6+526x_7+883x_8+1053x_9+2160x_{10}+2898v_1+2299v_2 \leq 10120$

$6d_1+8d_2+7x_1+4x_2+6x_3+6x_4+20x_5+28x_6+1x_7+3x_8+2x_9+21x_{10}+12v_1+6v_2 \geq 46$

$350d_1+369d_2+92x_1+63x_2+51x_3+13x_4+60x_5+34x_6+63x_7+31x_8+18x_9+84x_{10}+25v_1+554v_2 \geq 1100$

$4d_1+6d_2+3x_1+3x_2+1x_3+5x_5+2x_6+1x_7+1x_9+3x_{10}+2v_1+3v_2 \geq 15$

$3d_1+2d_2+9x_1+15x_2+35x_3+10x_5+5x_6+77x_7+22x_9+3v_1+1v_2 \geq 60$

$d_1+d_2=1$

$x_1+x_2=1$

$x_3+x_4=1$

$x_5+x_6=1$

$x_7+x_8+x_9+x_{10}=1$

$v_1+v_2=1$

END

int d1: int d2

int x1: int x2: int x3: int x4: int x5: int x6: int x7: int x8: int x9: int x10

OBJECTIVE FUNCTION VALUE = **21.00000**

VARIABLE	VALUE
D1	1.000000
D2	0.000000
X1	1.000000
X2	0.000000
X3	1.000000
X4	0.000000
X5	1.000000
X6	0.000000
X7	1.000000
X8	0.000000
X9	0.000000
X10	0.000000
V1	0.000000
V2	1.000000

Minimalna cijena obroka za djevojke = 21,00 kn

d_1	d_2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	v_1	v_2
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1

Nutritivni sastav

Energija (kJ)	Proteini (g)	Mast (g)	Ca (mg)	Fe (mg)	Vitamin C (mg)
9938	46	54	1170	17	135

Maksimalna cijena obroka za djevojke = 21,80 kn

d_1	d_2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	v_1	v_2
0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1

Nutritivni sastav

Energija (kJ)	Proteini (g)	Mast (g)	Ca (mg)	Fe (mg)	Vitamin C (mg)
10024	48	58	1189	19	134

Minimalna cijena obroka za mladiće = 22,40 Kn

d_1	d_2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	v_1	v_2
1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1

Nutritivni sastav

Energija (kJ)	Proteini (g)	Mast (g)	Ca (mg)	Fe (mg)	Vitamin C (mg)
11556	63	61	1162	19	64

Maksimalna cijena obroka za mladiće = 23,20 Kn

d_1	d_2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	v_1	v_2
0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1

Nutritivni sastav

Energija (kJ)	Proteini (g)	Mast (g)	Ca (mg)	Fe (mg)	Vitamin C (mg)
11642	65	65	1181	21	63