

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU
PREHRAMBENO-TEHNOLOŠKI FAKULTET OSIJEK

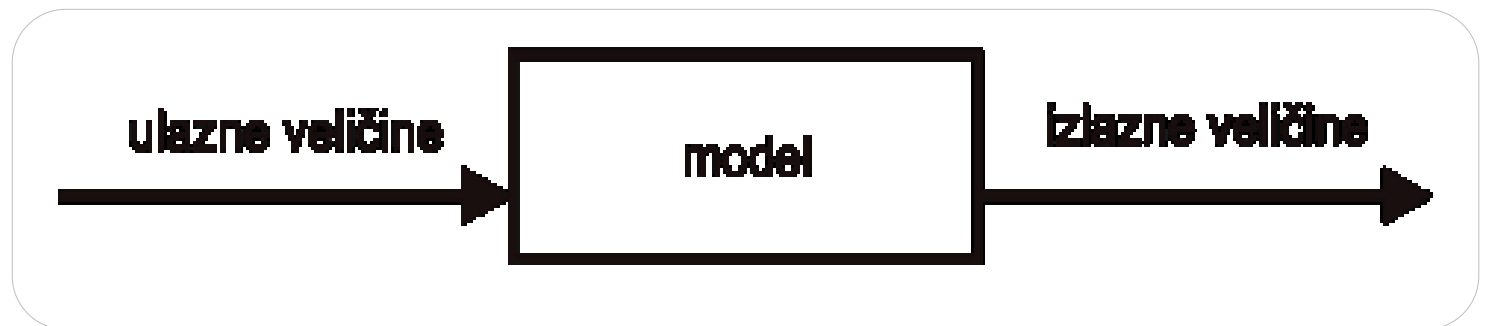
**MODELIRANJE I UPRAVLJANJE
U PREHRAMBENO-TEHNOLOŠKIM PROCESIMA**

MODELIRANJE OPERACIJA I PROCESA

- *Materijali s predavanja* -

Prof. dr. sc. Damir Magdić

redoviti profesor u trajnom zvanju



Modeliranje i upravljanje u prehrambeno-tehnološkim procesima

(PhI: P-S-V = 45-15-15)

Modeliranje operacija i procesa

(PcI: P-S-V = 30-0-30)

<http://www.ptfos.unios.hr/modeli/>

OČEKIVANI ISHODI UČENJA

Studenti će biti osposobljeni za:

- samostalno korištenje računalnih simulacija pojedinih tehnoloških operacija i procesa,
- usporedbu računalnih programa i odabir najprikladnijih,
- kombiniranje različitih računalnih programa za modeliranje i simulacije,
- optimiranje procesa, proizvoda i dobiti u proizvodnji i konzumiranju hrane,

- samostalno analiziranje informacija i donošenje zaključaka,
- samostalan ili timski rad u području modeliranja i optimiranja u prehrambeno-procesnom inženjerstvu i nutricionizmu,
- izradu inženjerskih izvješća o rezultatima modeliranja i optimiranja.

Studenti će biti upoznati sa znanstvenim istraživanjima u području modeliranja u procesnom inženjerstvu i izrađenim diplomskim radovima na nastavnom predmetu.

I. OSNOVE MODELIRANJA SUSTAVA

1. Uvod u modeliranje i upravljanje
2. Primjene modela
3. Primjeri modela
 - proces sterilizacije namirnica
 - proces smrzavanja hrane
4. Analiza matematičkog modela i realnog sustava
5. Metodologija razvoja modela
6. Znanstveni sadržaj modeliranja u biotehnologiji

II. PODJELA MATEMATIČKIH MODELA

1. s usredotočenim veličinama stanja (koncentrirani)
s raspodjeljenim veličinama stanja (distribuirani)
2. deterministički - stohastički
3. kontinuirani - diskontinuirani
4. linearni - nelinearni
5. ...

III. MODELI STACIONARNIH STANJA

1. Modeli kemijskih i enzimskih reakcijskih sustava
 - opći oblik bilance mase :
 - kemijske reakcije
2. Bilanca mase i modeli stacionarnih stanja
3. Matematičke metode za određivanje stacionarnih stanja
 - direktne (Gaussova metoda)
 - iterativne (Jacobijeva linearna iteracija)

4. Matematički modeli nelinearnih sustava i njihovih stacionarnih stanja
 - uparivač i uparna stanica
5. Matematičke metode za određivanje stacionarnih stanja modela nelinearnih sustava
 - Jacobijeva linearna iteracija
 - Newton-Raphsonova metoda
7. Primjeri rješavanja nelinearnih jednadžbi
 - Wegsteinova metoda
 - metoda sekante

IV. MODELI I SIMULACIJE DINAMIČKIH SUSTAVA

1. Grafička simulacija dinamike (koncept prostora stanja)
2. Dinamički sustavi 1. i 2. reda
3. Primjeri modela dinamičkih sustava 1. i 2. reda
 - dinamika smrzavanja namirnica
 - dinamika fermentacije (model upravljanja)
 - dinamika toplinske sterilizacije

4. Matematičke metode za rješavanje sustava diferencijalnih jednažbi (s usredotočenim parametrima)

- Eulerova metoda
- Korigirana Eulerova metoda
- Runge-Kutta 2
- Runge-Kutta 4

V. LINEARNO PROGRAMIRANJE

1. Primjena linearnog programiranja
2. Simplex metoda
 - optimiranje sastava smjese sirovina
 - optimiranje sastava i cijene obroka
 - optimiranje iskorištenja rada strojeva/pogona
 - optimiranje transporta

PRIMJERI IZ STRUČNOG I ZNANSTVENOG RADA

1. Primjeri suradnje s gospodarstvom
2. Primjeri diplomskih radova
3. Primjeri iz znanstveno-istraživačkog rada

Seminari (PhI) - 15 sati

1. Metode za rješavanje (sustava) linearnih jednadžbi (Stacionarna stanja kod kemijskih reakcija)

Direktne metode

- Gaussova eliminacija

Iterativne metode

- Jacobijeva (linearna) iteracija
- Gauss-Seidlova iteracija

2. Metode za rješavanje nelinearnih jednačbi

(Stacionarna stanja kod enzimskih reakcija)

- Newton-Raphsonova iteracija
- Metoda tangente
- Metoda sekante
- Wegsteinova metoda

3. Metode za integriranje diferencijalnih jednažbi

(Dinamička stanja - pri regulaciji procesa)

- Eulerova metoda
- Korigirana Eulerova metoda
- Runge-Kutta 2
- Runge-Kutta 4

4. Metode linearnog programiranja

(Za optimiranje: (\leq), (\geq), ($=$), ($\leq \geq =$))

- Simplex metoda
- optimiranje sastava smjese sirovina
- optimiranje sastava i cijene obroka
- optimiranje iskorištenja rada strojeva/pogona
- optimiranje transporta

MS Excel

MS Quick Basic + MS DOSBox

LINDO

MS Word

Literatura

<http://www.ptfos.unios.hr/modeli>

- *prof. dr. sc. Damir Magdić* "Prezentacije i materijali s predavanja"
- *prof. dr. sc. Damir Magdić* "Skripta Numeričke metode"

Dodatna literatura:

- Gomzi. Z, Kurtanjek, Ž. Modeliranje u kemijskom inženjerstvu. Sveučilišni udžbenik, HDKI/FKIT Zagreb, 2019.
(Poglavlje 1. Modeli i modeliranje, str. 1-127)

I na kraju ...



Izvješća s računalnih vježbi:

MS Word dokument

Parcijalni ispiti (I. i II.):

tijekom semestra (po dva zadatka)

ili

ili

Pisani dio ispita:

3 zadatka - 90 minuta

Usmeni dio ispita:

tehnološki dio + numerička metoda

Studentima je omogućena izrada diplomski rada na sljedećim područjima:

- zajedničko rješavanje zadataka u pogonu ili laboratoriju
- optimiranje svojstava proizvoda i/ili procesnih parametara
- ne-destruktivne metode analize namirnica
- optimiranje receptura
- izrada matematičkih i/ili računalnih modela za primjere iz prehrambenog i procesnog inženjerstva
- rad na istraživačkim projektima



1. Matematičko modeliranje, optimiranje i upravljanje

Uvod i definicije pojmova

Metodologija razvoja matematičkog modela

Podjela matematičkih modela

Numeričke metode

Računalni programi i simulacije

sirovina

proizvodni
proces

proizvod

Sirovina, namirnica i reaktant NISU ulazne veličine!!!

Proizvod, energija/tkivo, produkti NISU izlazne veličine!!!

To su materijali koje opisuju ulazne i izlazne veličine.

reaktanti

reakcija

produkti

U modelima ih opisuju
ulazne veličine.

U modelima ih opisuju
izlazne veličine.

ulazne veličine

model

izlazne veličine



Sirovine su, npr.: mlijeko, brašno, voće, povrće.

Sirovine su opisane sastavom i mjernim veličinama SI sustava (udio suhe tvari i vode, koncentracija neke tvari, masa, tvrdoća, čvrstoća, protok soka, temperatura pare, ...).

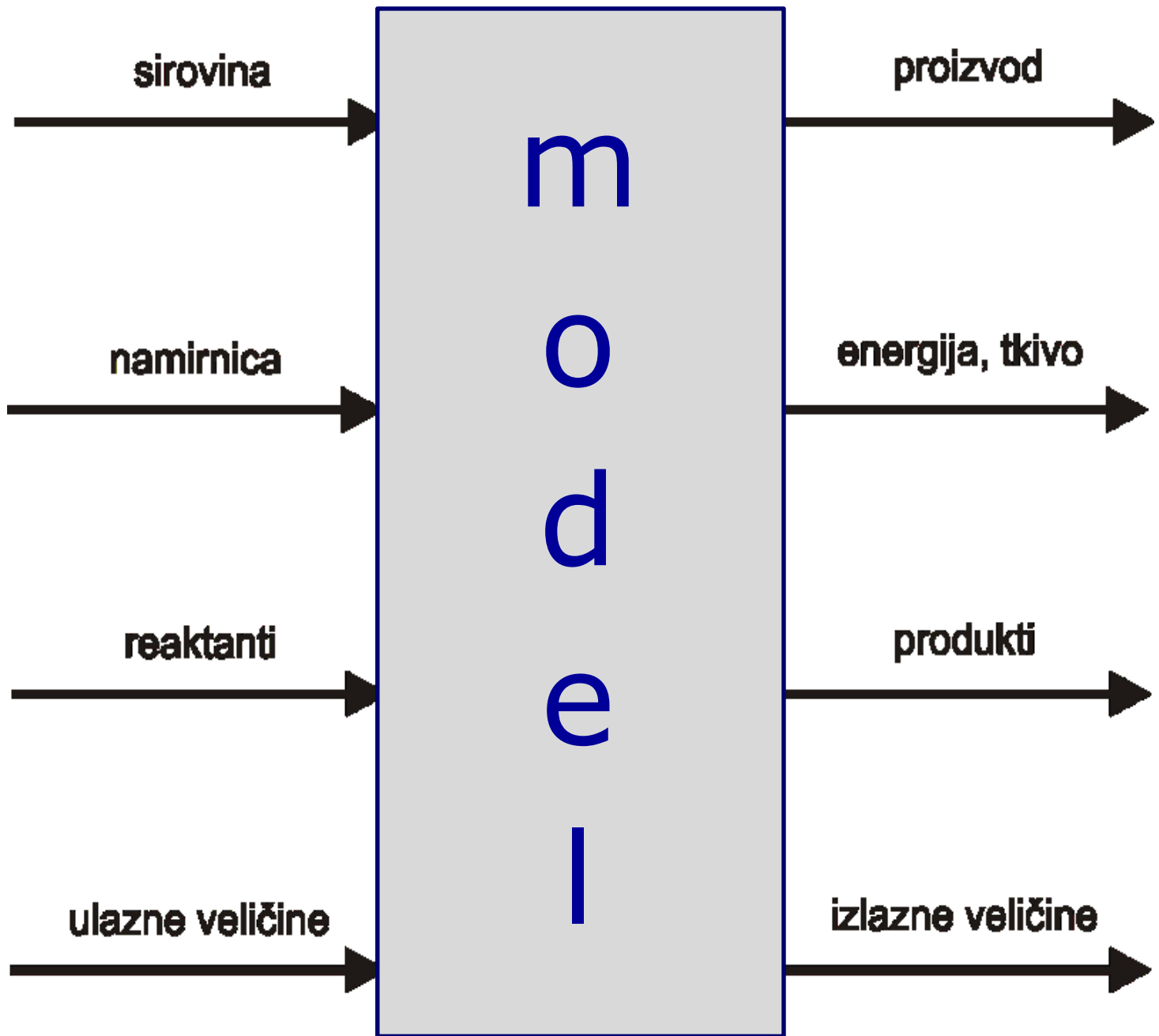
Ulazne veličine su fizikalne mjerne veličine koje **opisuju sirovinu i početne uvjete u procesu.**

Izlazne veličine su fizikalne mjerne veličine koje **opisuju proizvod i izlazne uvjete u procesu.**

sirovina **≠** ulazna veličina

namirnica **≠** ulazna veličina

reaktant **≠** ulazna veličina



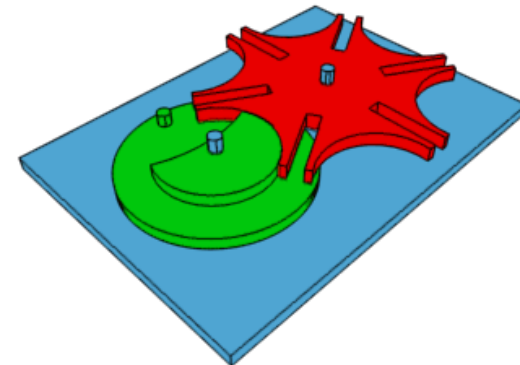
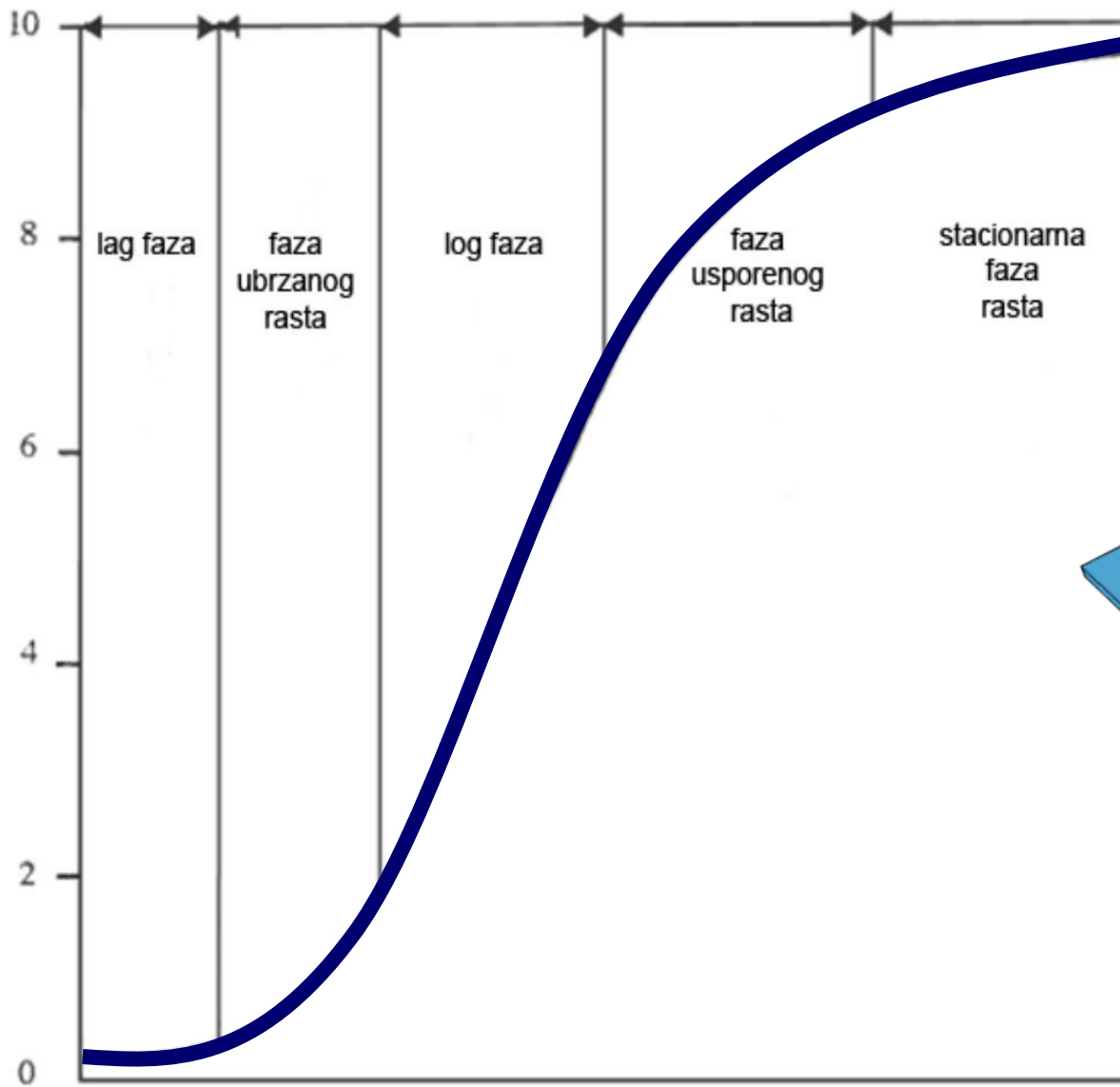


što je modeliranje ?

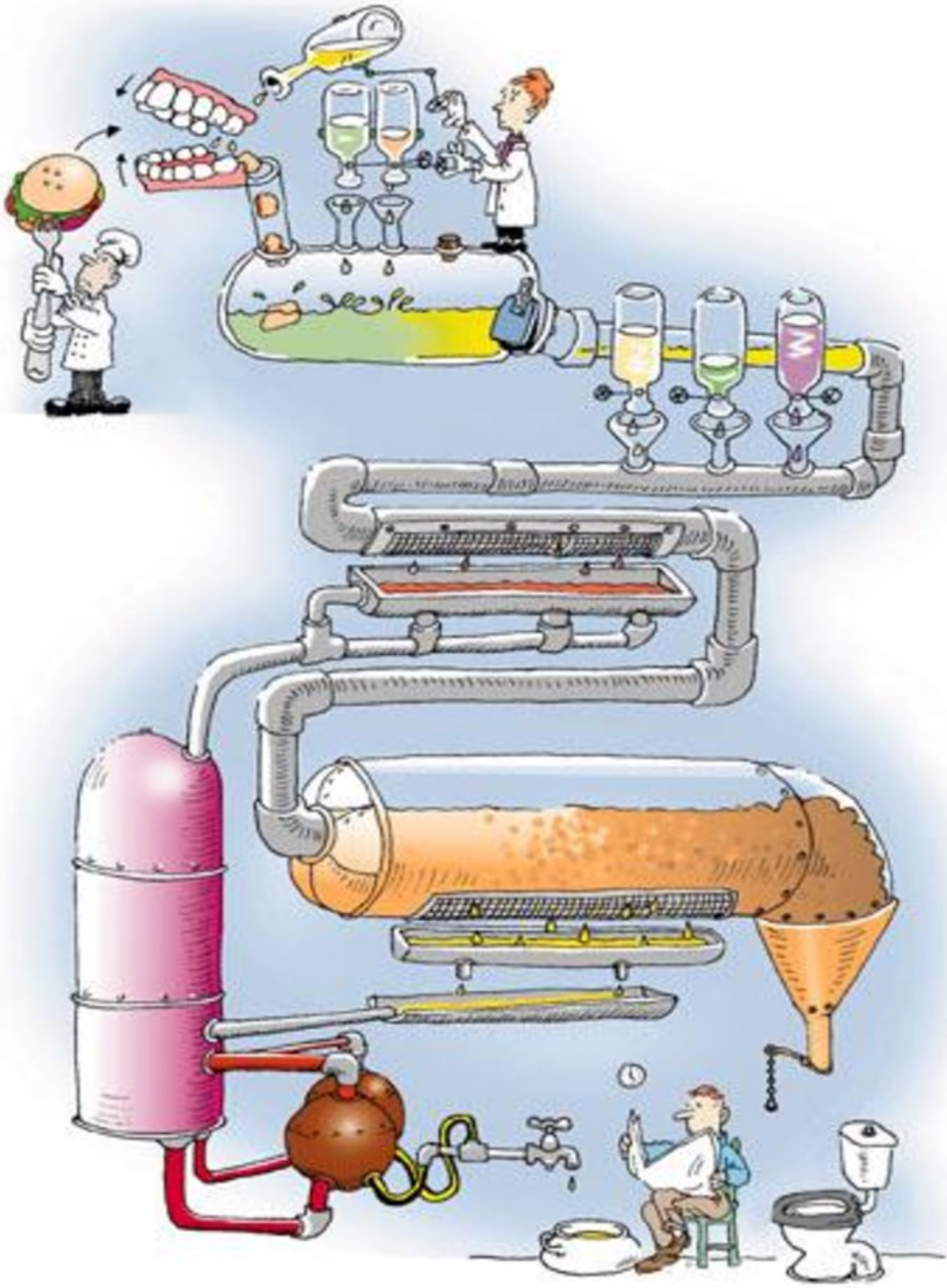
sjetite se nekih modela

što rade modeli ?

log N



vrijeme







(matematičko)

modeliranje,

optimiranje

i

(računalno)

upravljanje

u prehrambeno-tehnološkim procesima

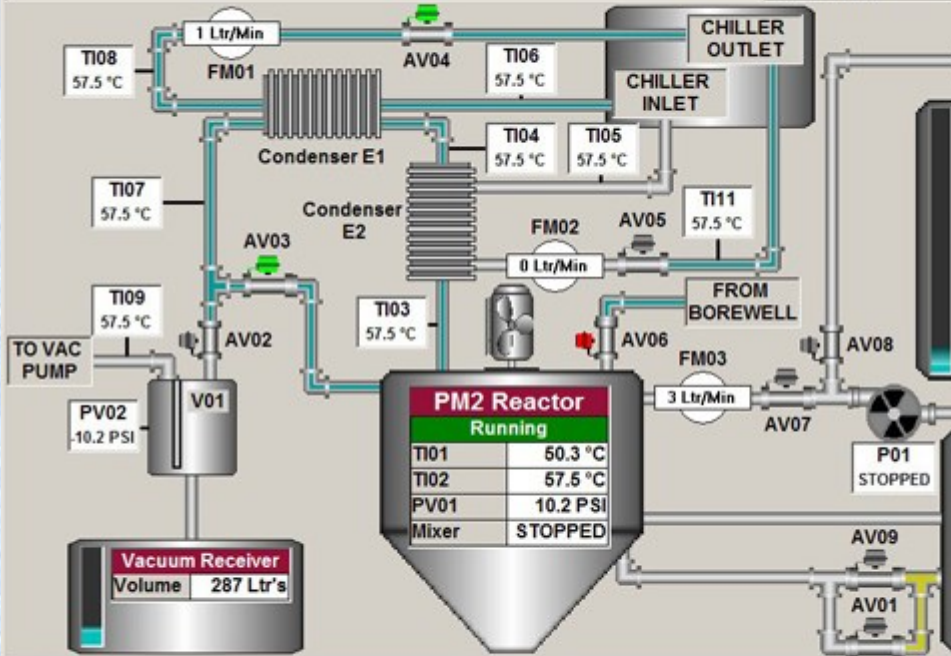
Kontrolna soba u prehrambeno-tehnološkim procesima





Vessel PM2

Batch ID
Product ID
Start Time



PM2 Reactor	
Running	
TI01	50.3 °C
TI02	57.6 °C
PV01	10.2 PSI
Mixer	STOPPED



F7 System Alarms Page

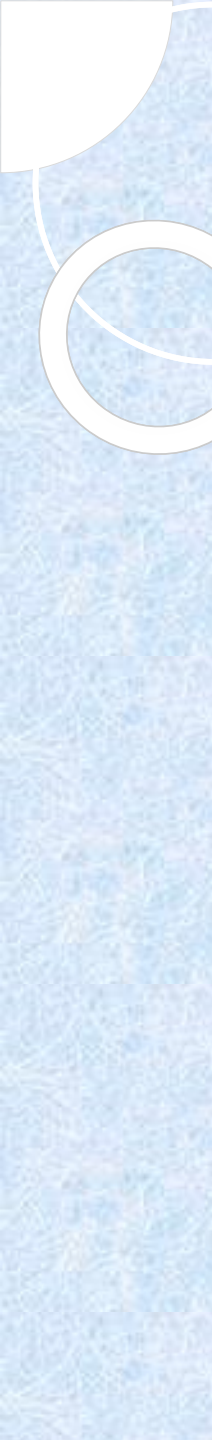
KEPware.KEPServerEx.V4 - C327 Running Scan Time 0




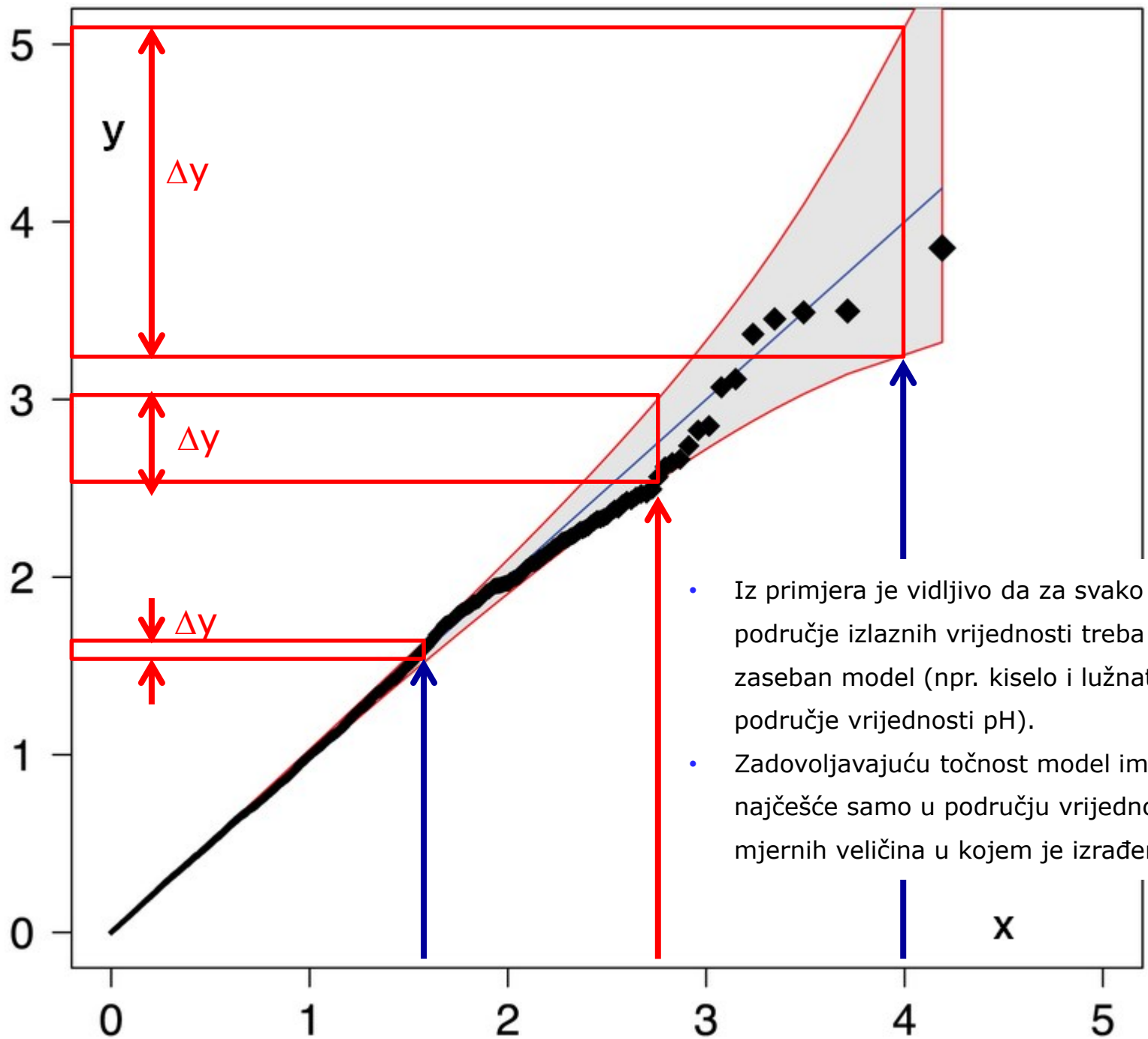
Uvod i definicije pojmova

- **Matematičko modeliranje**
- **postupak opisivanja odnosa** između varijabli i parametara u nekom sustavu uporabom matematičkih funkcija (jednadžbi)
- **matematički model povezuje ulazne (x) i izlazne (y) veličine** pomoću matematičkih izraza $y = f(x)$

- matematička interpretacija odnosa između varijabli i parametara u nekom sustavu izrađena je **na temelju bilanci mase i energije**
- zadovoljavajuću točnost model ima najčešće samo u području vrijednosti mjernih veličina u kojem je izrađen

- 
- **cilj modeliranja** je razviti i koristiti model za analiziranje, projektiranje, optimiranje i upravljanje sustava ili jednog njegovog dijela
 - odnosi među veličinama opisani su matematičkim jednadžbama koje se rješavaju matematičkim metodama

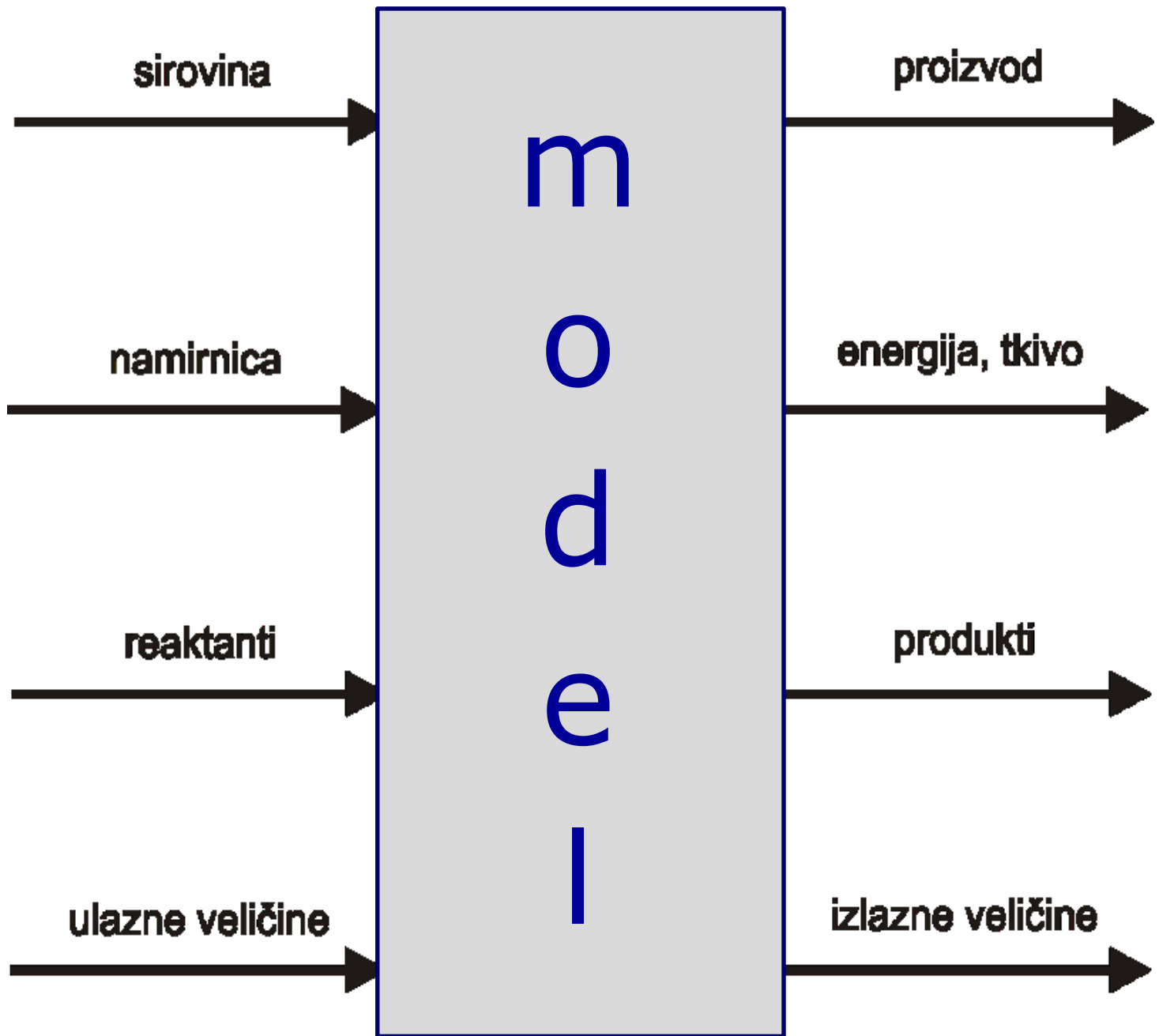
- 
- matematičko modeliranje je općenito prepoznatljivo kao proces primjene matematike na realni sustav radi dobivanja kasnije potrebnih informacija
 - modeliranje ne mora nužno riješiti problem, ali će ga vjerojatno rasvijetliti i pojasniti promatranu situaciju



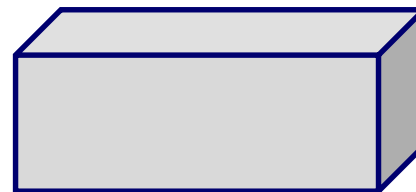
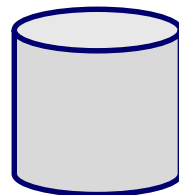
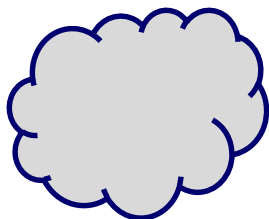
- Iz primjera je vidljivo da za svako područje izlaznih vrijednosti treba izraditi zaseban model (npr. kiselo i lužnato područje vrijednosti pH).
- Zadovoljavajuću točnost model ima najčešće samo u području vrijednosti mjernih veličina u kojem je izrađen.

- za vrijednosti koje su izvan analiziranog raspona potrebno je model prilagoditi (*eng. model adjustment*) ili izraditi novi
- realni i modelni sustavi imaju **ulaz, izlaz i sustav** u kojem se događa promjena



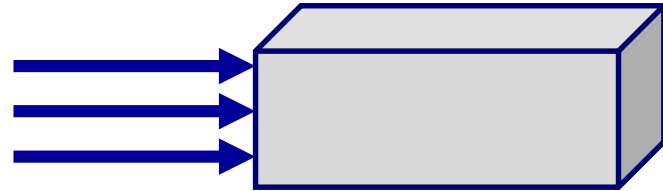


- **Sustav**



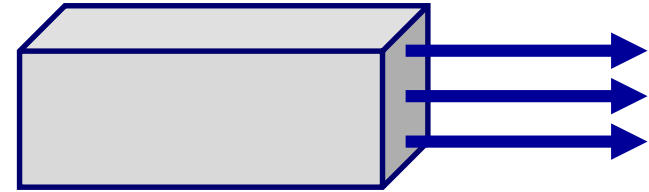
- apstraktna/zamišljena cjelina, za koju smatramo da nema interakcija s okolinom nego je izolirana i egzistira kao nezavisna
- definiran matematičkim relacijama između ulaznih i izlaznih veličina

- **Ulazne veličine**

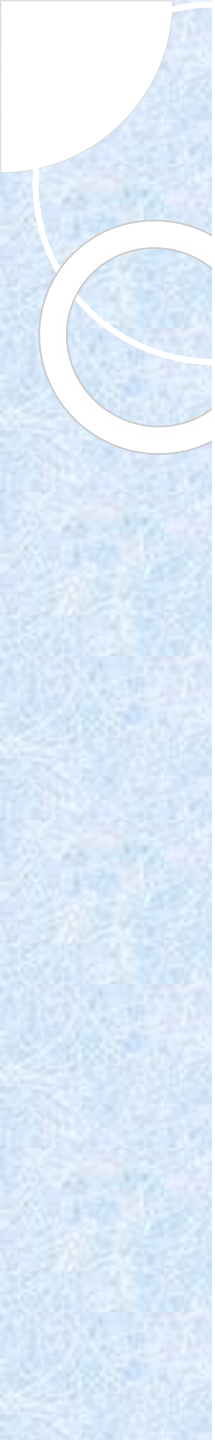


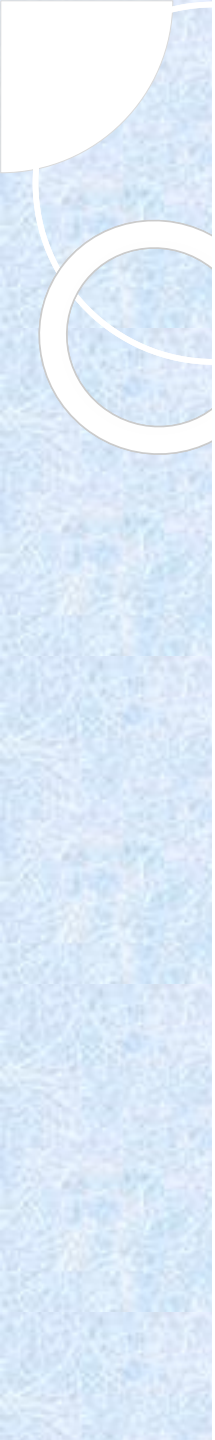
- poznate su nam u procesu ili modelu i njihovu vrijednost zadajemo na početku procesa ili postupka modeliranja
- u pravilu ne ovise o događajima u procesu ili modelu pa su one **nezavisne veličine**
- *kod sustava s povratnom vezom mogu postati zavisne jer zavise o izlazu iz procesa*

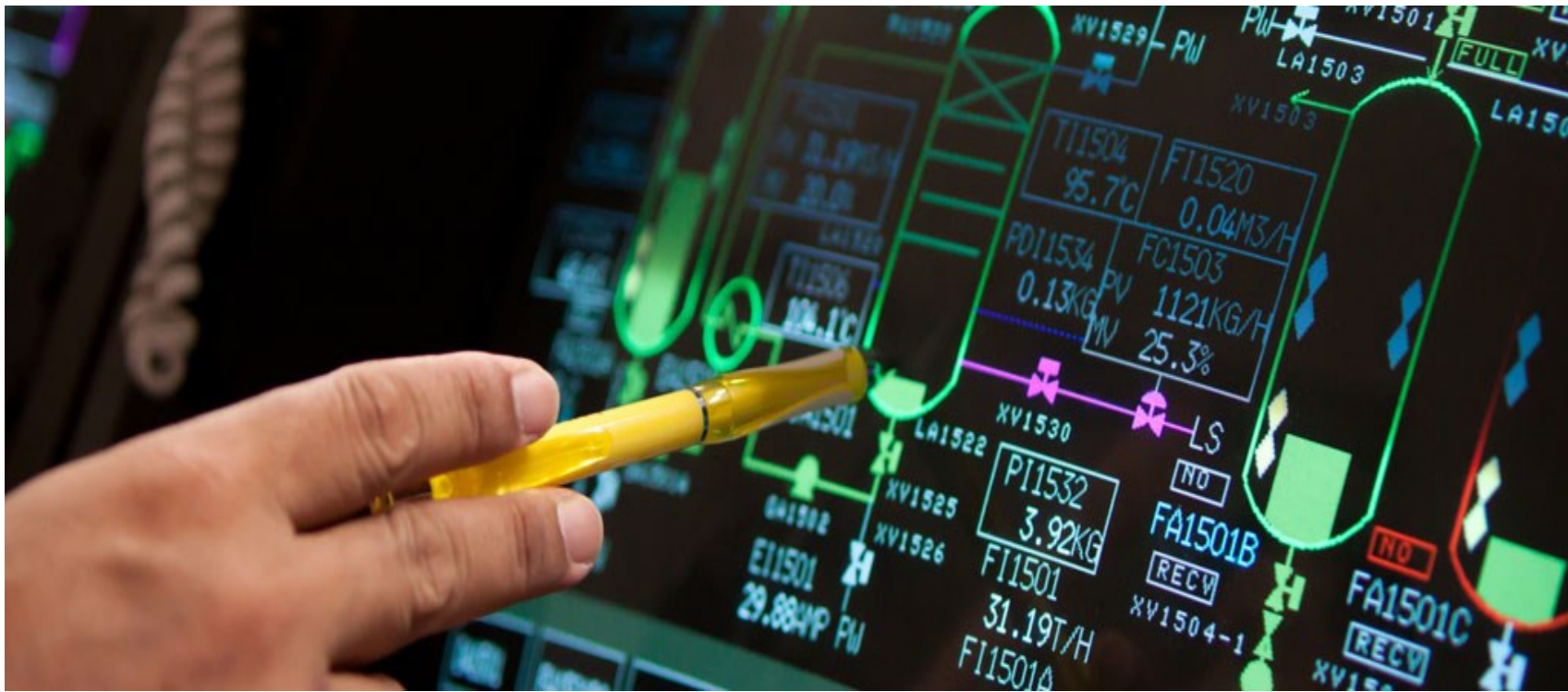
- **Izlazne veličine**

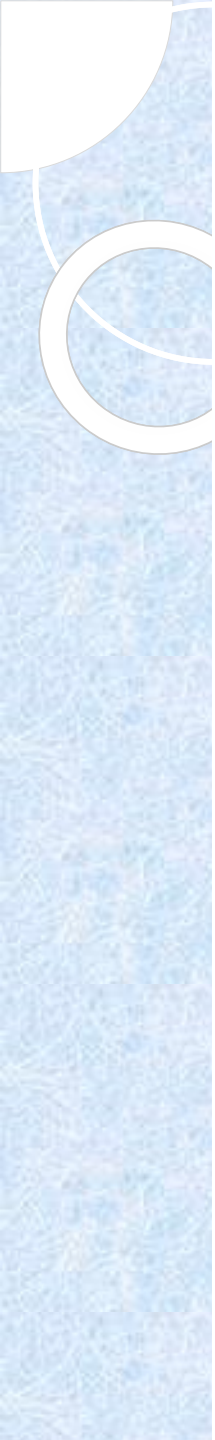


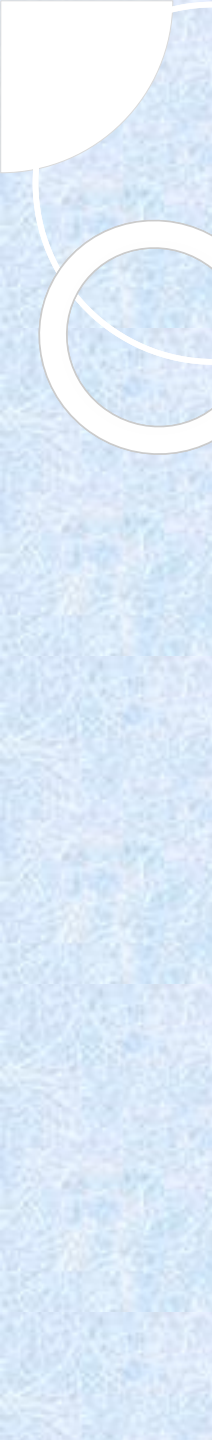
- dobivaju neku poznatu vrijednost tek nakon provedbe procesa ili modeliranja
- zavise o događajima u procesu ili modelu pa kažemo da su **zavisne veličine**


- 
- **Računalna simulacija**
 - **računalni program** izrađen na temelju matematičkih modela
 - omogućuje oponašanje nekog sustava na brz i jeftin način
 - simulacije imaju i korisničko sučelje koje vizualizira sustav ili proces

- 
- **Upravljanje procesom**
 - **ciljano vođenje procesa** pri kojemu se krajnji cilj postiže namjernim i planiranim promjenama ulaznih veličina
 - na temelju iskustva ili modela i simulacija određuju se ulazne vrijednosti za upravljanje procesom



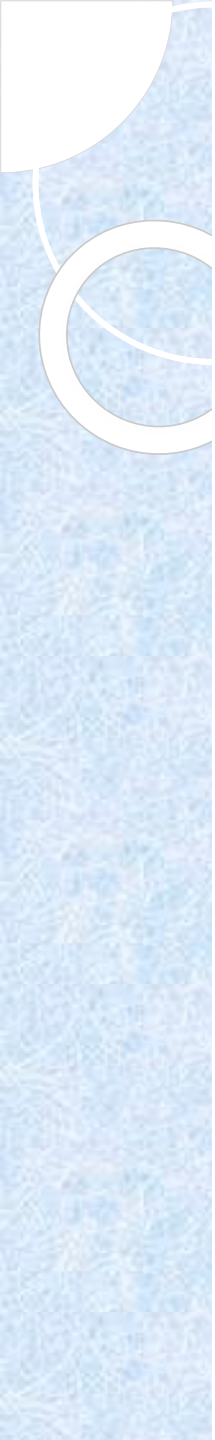
- 
- **Optimiranje**
 - **postupak ponavljanja** (probnog) vođenja procesa, modela ili simulacije, kojemu je **svrha ostvariti najmanje troškove, najvišu dobit, najveću količinu, svojstva kakvoće ili drugo.**
 - izbor matematičke ili statističke metode za optimiranje ovisi o procesu i njegovim svojstvima

- 
- **Svrha matematičkih modela i simulacija**
 - omogućuju brži, lakši i jeftiniji uvid u utjecaj ulaznih vrijednosti na ishode procesa
 - skraćuju vrijeme potrebno za određivanje optimalnih uvjeta za upravljanje

- 
- - izbor optimalne lokacije tvornice,
 - - optimalno planiranje investicijskih ulaganja,
 - - optimiranje proizvodnih programa i povećanje dobiti,
 - - optimalno razmještanje strojeva,
 - - optimiranje postojećih tehnoloških postupaka,
 - - izbor optimalnih tehnoloških postupaka,
 - - analiza i poboljšanje rada uređaja i procesa,
 - - projektiranje boljih uređaja i procesa,
 - - optimiranje sastava smjese i smanjenje troškova,
 - - optimiranje plana prehrane,
 - - optimiranje jelovnika,
 - - optimiranje transporta ...

- **Stacionarno stanje procesa**
- pojava kada se tijekom odvijanja nekog procesa **ulazne i izlazne vrijednosti** ustale i **zadržavaju stalne/konstantne vrijednosti**
- vrijednosti ulaznih i izlaznih veličina međusobno se razlikuju, ali ostaju nepromijenjene u procesu pa pišemo da je njihova **derivacija ili promjena tijekom vremena jednaka nuli:**

$$\frac{d}{dt}(x, y) = 0$$

- 
- upravljanje procesima u stacionarnom stanju je znatno lakše od upravljanja dinamičkim procesima
 - varijable postaju konstante i ponašaju se kao parametri
 - postizanje stalnih vrijednosti olakšava upravljanje i nadzor procesa

- **Dinamička stanja procesa**
- zbog brojnih razloga vrijednosti varijabli mijenjaju se tijekom procesa, pa su u praksi znatno češća dinamička stanja procesa
- za takve procese pišemo da je derivacija ili promjena vrijednosti ulaznih i izlaznih veličina tijekom vremena različita od nule:

$$\frac{d}{dt}(x, y) \neq 0$$


- procesi i modeli imaju ulazne i izlazne vrijednosti od kojih su neke stalne, a neke promjenjive

- veličine sa stalnim vrijednostima su **parametri**

(stalnica ili konstanta \neq parametar)

Konstante su: π , brzina zvuka, gravitacijska sila, opća plinska konstanta i sl.)

- promjenjive veličine su **varijable**

- 
- smanjenjem broja varijabli model se pojednostavljuje ali se smanjuje i njegova točnost
 - povećanjem broja varijabli modeli postaju složeniji i često ne daju rješenja
 - izbor varijabli kojima ćemo pretpostaviti stalnu vrijednost u modelu vrši se na temelju iskustva i utjecaja pojedine veličine na sam ishod procesa

- PRIMJER:
- male promjene volumena uređaja nemaju značajniji utjecaj na brzinu reakcije koja se u njima odvija
- za volumen (unutar malih raspona) možemo pretpostaviti stalnu vrijednost i u modelu ga učiniti parametrom (pišemo $V = \text{konst.}$)

- pri ponavljanju simulacija, pretpostavljene stalne vrijednosti nekih veličina, u sljedećoj simulaciji mogu dobiti novu stalnu vrijednost
- PRIMJER:
- za iste varijable: 10 simulacija za različite vrijednosti $V=(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10) \text{ m}^3$
- identičan postupak se primjenjuje u svim simulacijama
- posebno je važan pri prenošenju procesa iz laboratorijskog mjerila ili tzv. pilot postrojenja u realne uvjete

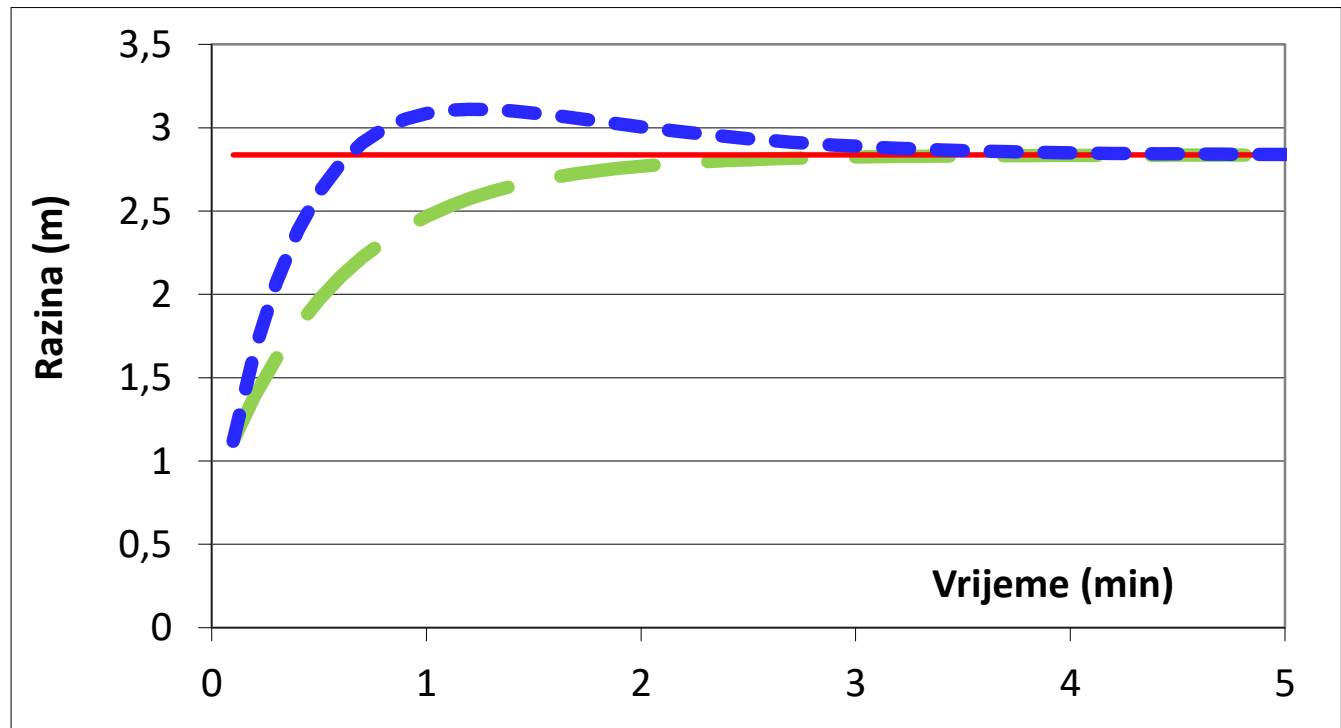
- varijable u modelu predstavljaju neka svojstva materijala, ambalaže, uređaja ili procesa
- varijable u modelima prehrambeno-tehnoloških procesa mogu biti:
temperatura, tlak, protok, udio suhe tvari, koncentracija tvari, viskozitet, gustoća i dr.
($T, p, q, x_{st}, c_A, \mu, \rho$)

- varijable u nutricionističkim modelima mogu biti koncentracije ili udjeli nutrijenata, starosna dob, zdravstveno stanje klijenta i dr.
- parametri ili stalne vrijednosti u takvim modelima najčešće su starosna dob klijenta, preporučeni dnevni unosi nekog nutrijenta ili tzv. RDA vrijednosti (*eng. Recommended Daily Allowance*) i dr.
- primjeri ?

- uobičajeni **način prikazivanja promjena varijabli** tijekom procesa je na "varijabla-vrijeme" grafu gdje se na apscisnoj osi prikazuju jedinice vremena, a na ordinatnoj osi vrijednosti varijable (T-t, q-t, h-t, c-t,...)
- za prikaz promjene varijable kod kontinuiranih modela koristi se **krivulja ili pravac**
- kod diskontinuiranih ili šaržnih modela za prikaz vrijednosti koristi se **histogram ili stupčasti grafikon**

- primjeri

- Ako je potrebno prikazati promjenu razine kapljevine u spremniku, pravilno je koristiti **krivulju** jer razina u svakom trenutku ima neku točnu vrijednost i neprekidna je promjena tijekom vremena.



- procesne veličine čije su vrijednosti poznate tijekom procesa i koriste se za simulaciju su **varijable stanja** (*ulazne i izlazne varijable*)
- *to su one mjerne veličine koje nam opisuju stanje namirnice koju proizvodimo i/ili procesnu veličinu koja je važna za proizvod*
- *npr. temperatura ugušćenog soka i udio suhe tvari u njemu tijekom procesa koncentriranja rijetkog soka uparavanjem*

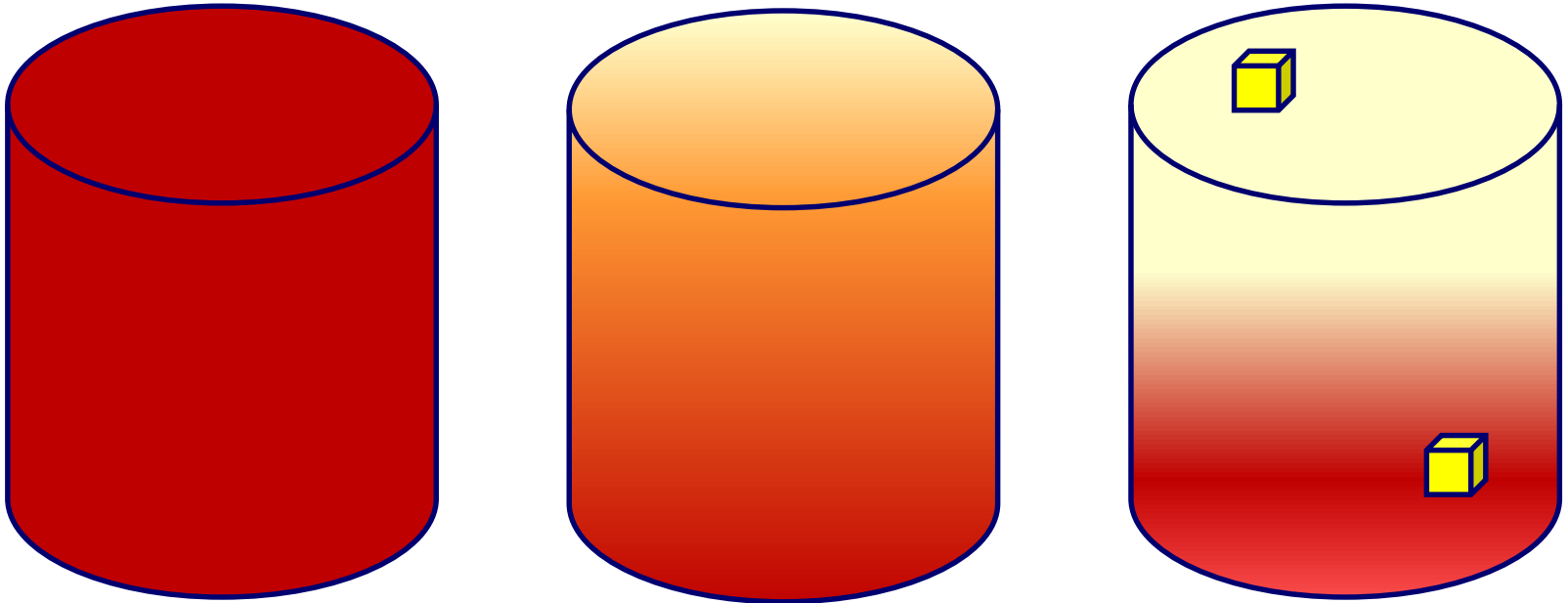
- kada se veličine u procesu mijenjaju bez našeg znanja i kontrole kažemo da su **slučajne varijable**

Primjeri:

- *masa automobila tijekom putovanja smanjuje se zbog sve manje goriva u spremniku*
- *masa proizvoda tijekom stajanja smanjuje se zbog sušenja proizvoda*
- *volumen kapljevine tijekom kuhanja u posudi smanjuje se zbog isparavanja vode*

PRIMJER SLUČAJNE VARIJABLE:

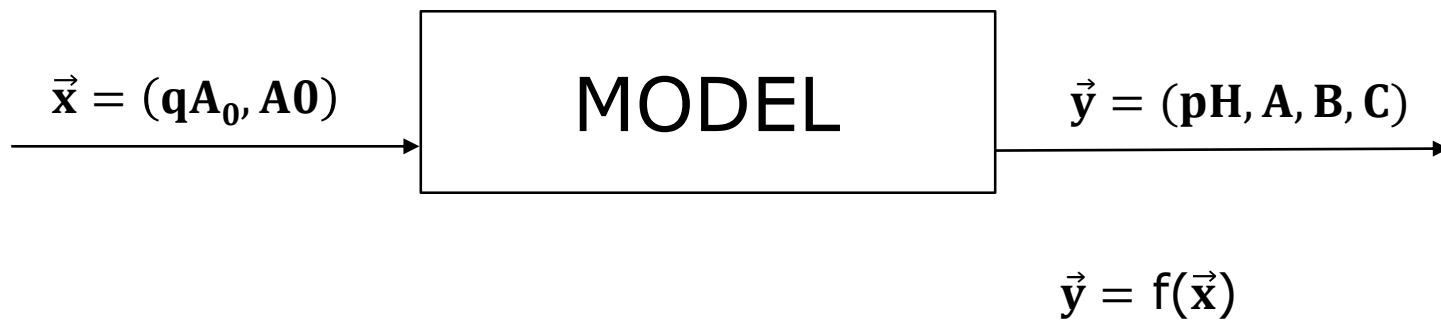
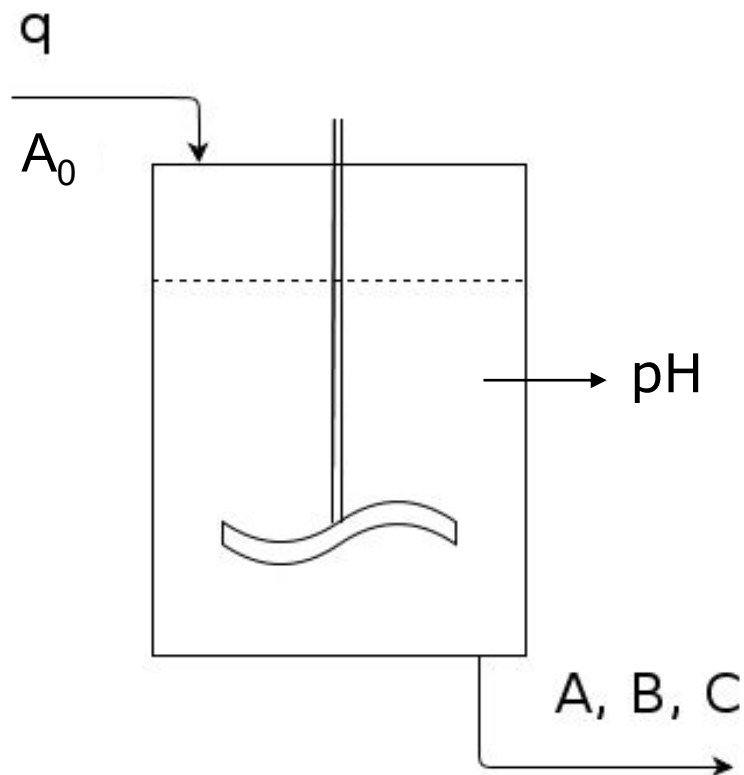
- pretpostavljamo da je udio suhe tvari jednak u svakom dijelu volumena kapljevine



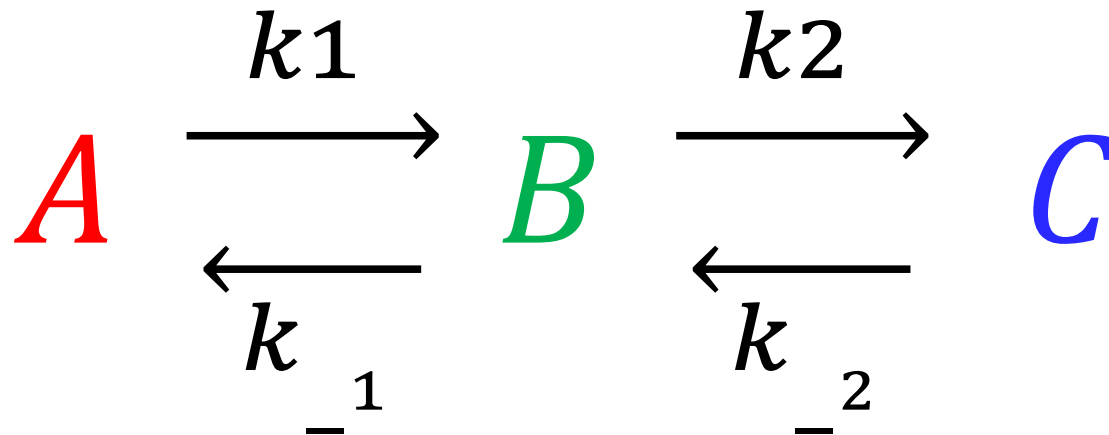
- zbog taloženja otopljene tvari u otopini, nakon nekog vremena udio suhe tvari može biti manji na vrhu, a veći na dnu spremnika

- procesi i modeli najčešće imaju više ulaznih i izlaznih veličina
- u modelima ih uobičajeno predstavljamo **vektorima**
- za ulazne veličine koristimo oznaku „ \vec{x} ” i kažemo da je to vektor ulaznih veličina ili kraće „**vektor x**”
- za izlazne veličine koristimo oznaku „ \vec{y} ” i kažemo da je to vektor izlaznih veličina i zovemo ga „**vektor y**”

- PRIMJER:
- vektor ulaznih veličina iz modela kemijskih reakcija može predstavljati ulazni protok koncentracija reaktanata A i B u reaktor
- tada su npr. elementi vektora $\vec{x} = (qA_0, A_0)$ ili $\vec{x} = (qB_0, B_0)$ ili oboje $\vec{x} = (qA_0, A_0, qB_0, B_0)$.
- izlazne veličine iz ovog modela mogle bi biti kiselost otopine i koncentracije produkata A, B i C pa su elementi vektora $\vec{y} = (pH, A, B, C)$



- PRIMJER:
- slijedni reakcijski mehanizam povratnih (reverzibilnih) kemijskih reakcija



- reakcija se događa u protočnom kemijskom reaktoru
- promjene koncentracija prikazujemo bilancama

- bilance mase **reaktanta** A $D=q/V$

$$\frac{d}{dt}A = D \cdot A_0 - D \cdot A - k_1 \cdot A + k_{-1} \cdot B$$

- **međuprodukta** B

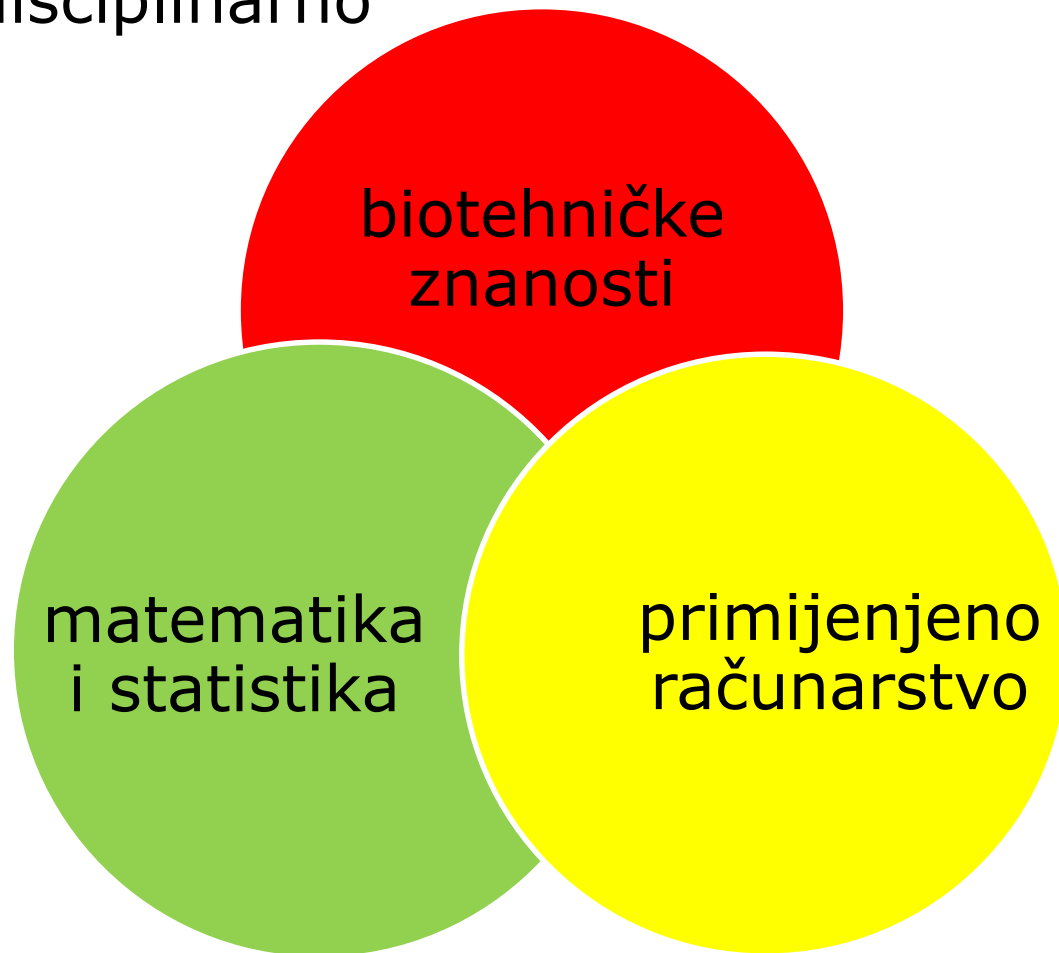
$$\frac{d}{dt}B = -D \cdot B + k_1 \cdot A + k_{-1} \cdot B - k_2 \cdot B + k_{-2} \cdot C$$

- **produkta** C

$$\frac{d}{dt}C = -D \cdot C + k_2 \cdot B - k_{-2} \cdot C$$

- gdje je A_0 koncentracija reaktanta A na početku reakcije, a D je razrjeđenje (omjer protoka i volumena)

- područje modeliranja i upravljanja u prehrambeno-tehnološkim procesima je multidisciplinarno





biotehničke znanosti

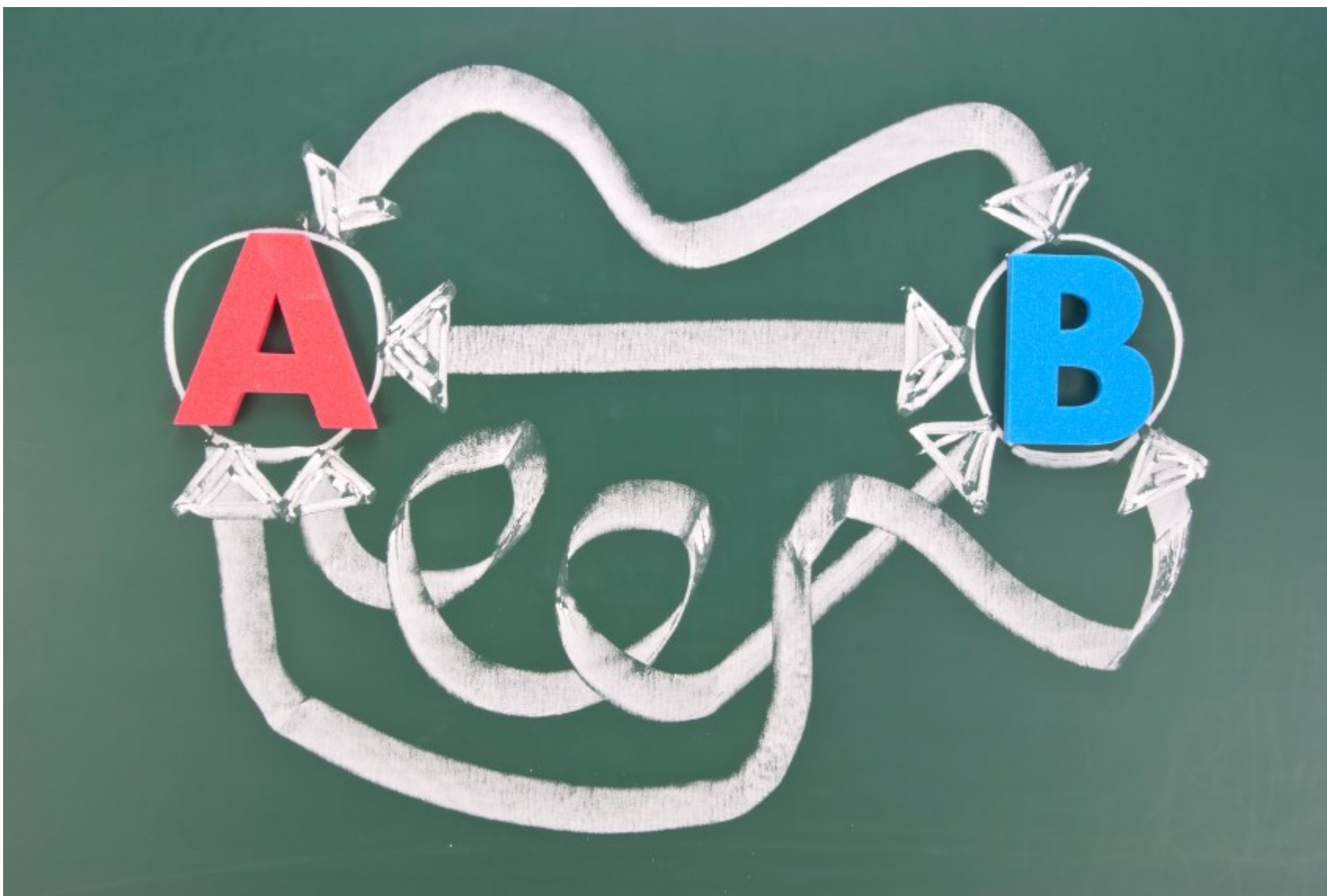
termodinamika, tehnička fizika, različite kemije, prijenos tvari i energije, procesi i mikrobiologija, mjerenje i upravljanje,...

matematika i statistika

matematičke i statističke metode

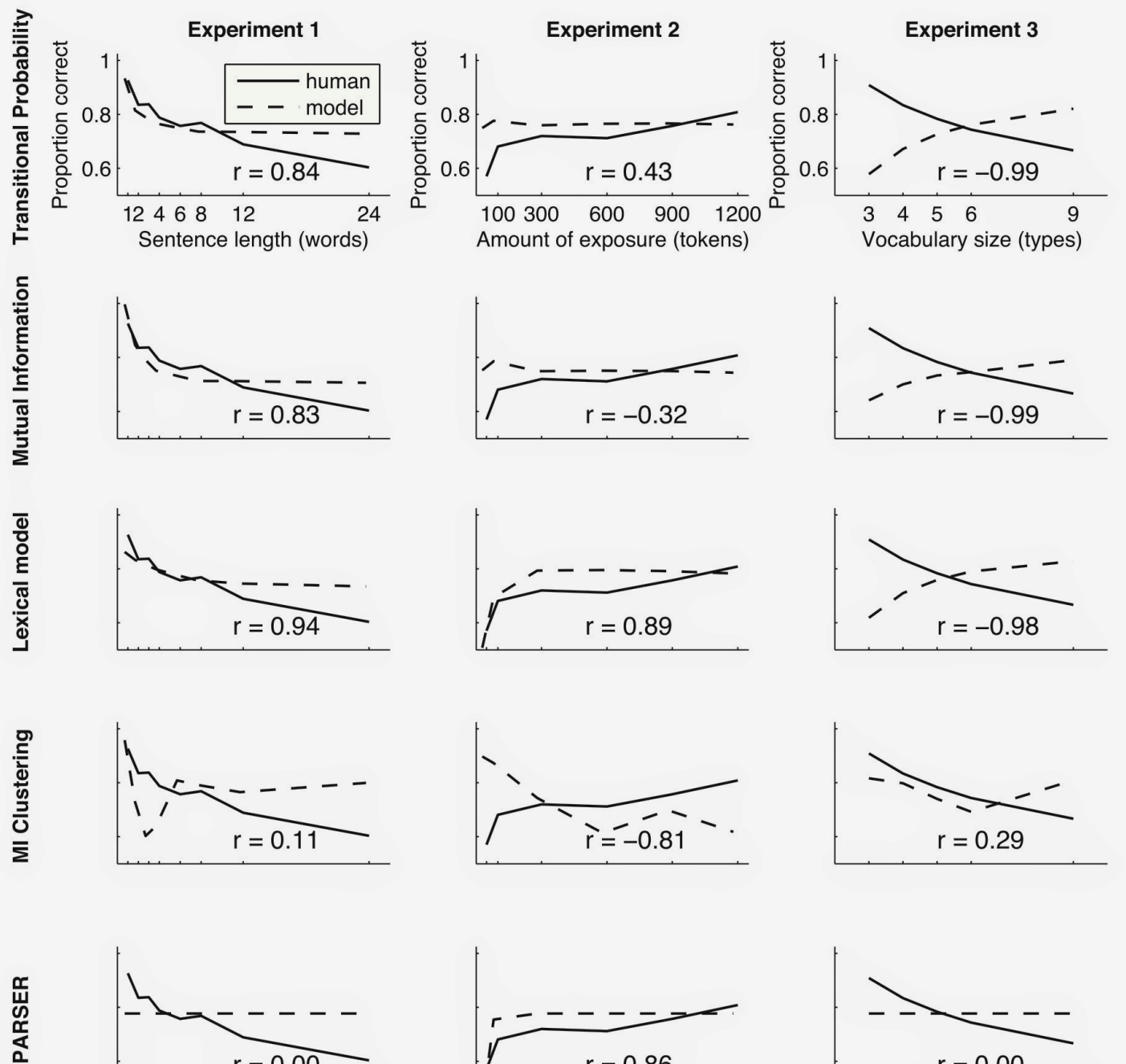
primijenjeno računarstvo

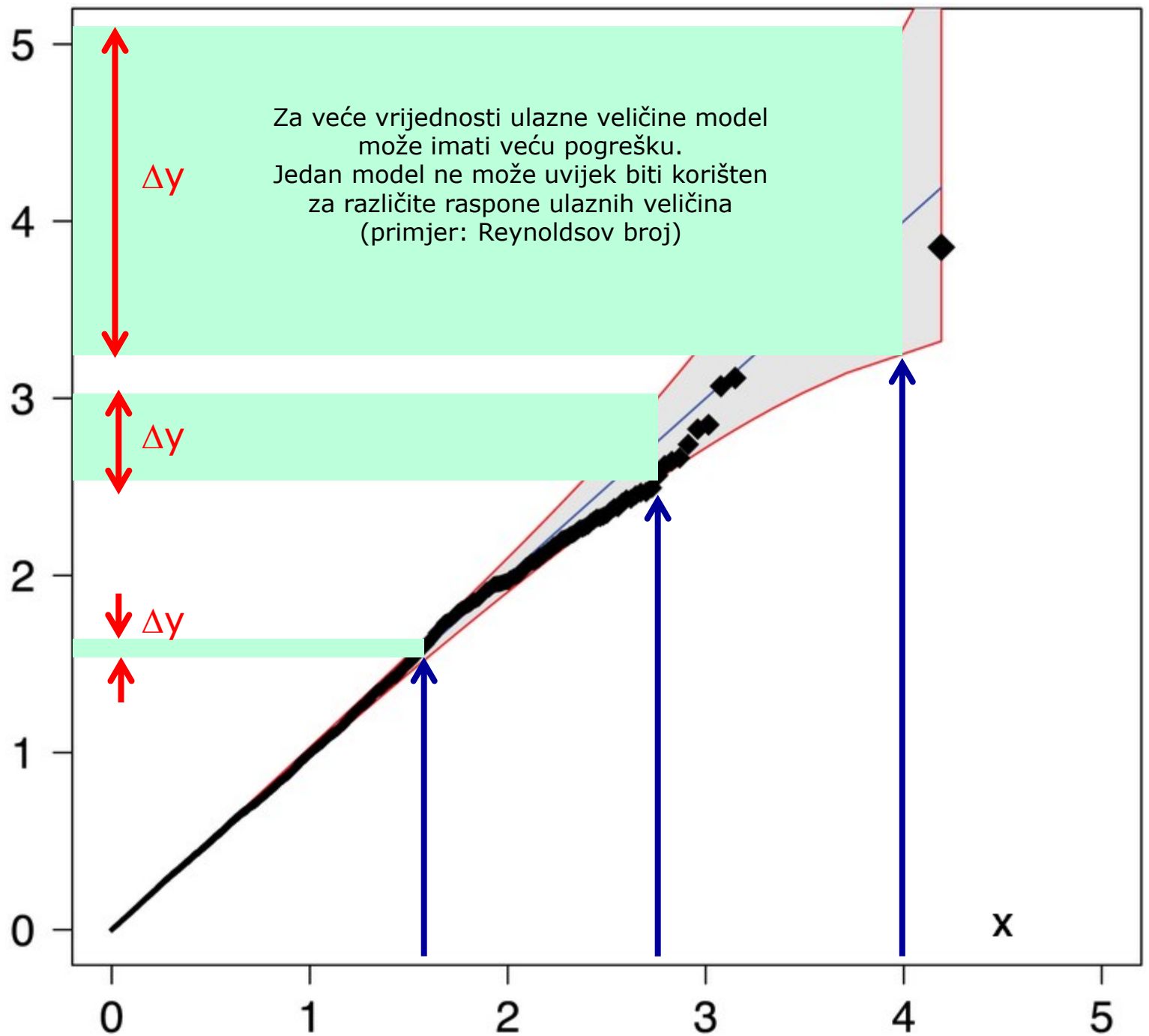
tablični kalkulatori, tekst procesori, web pretraživači, baze podataka, programiranje,...

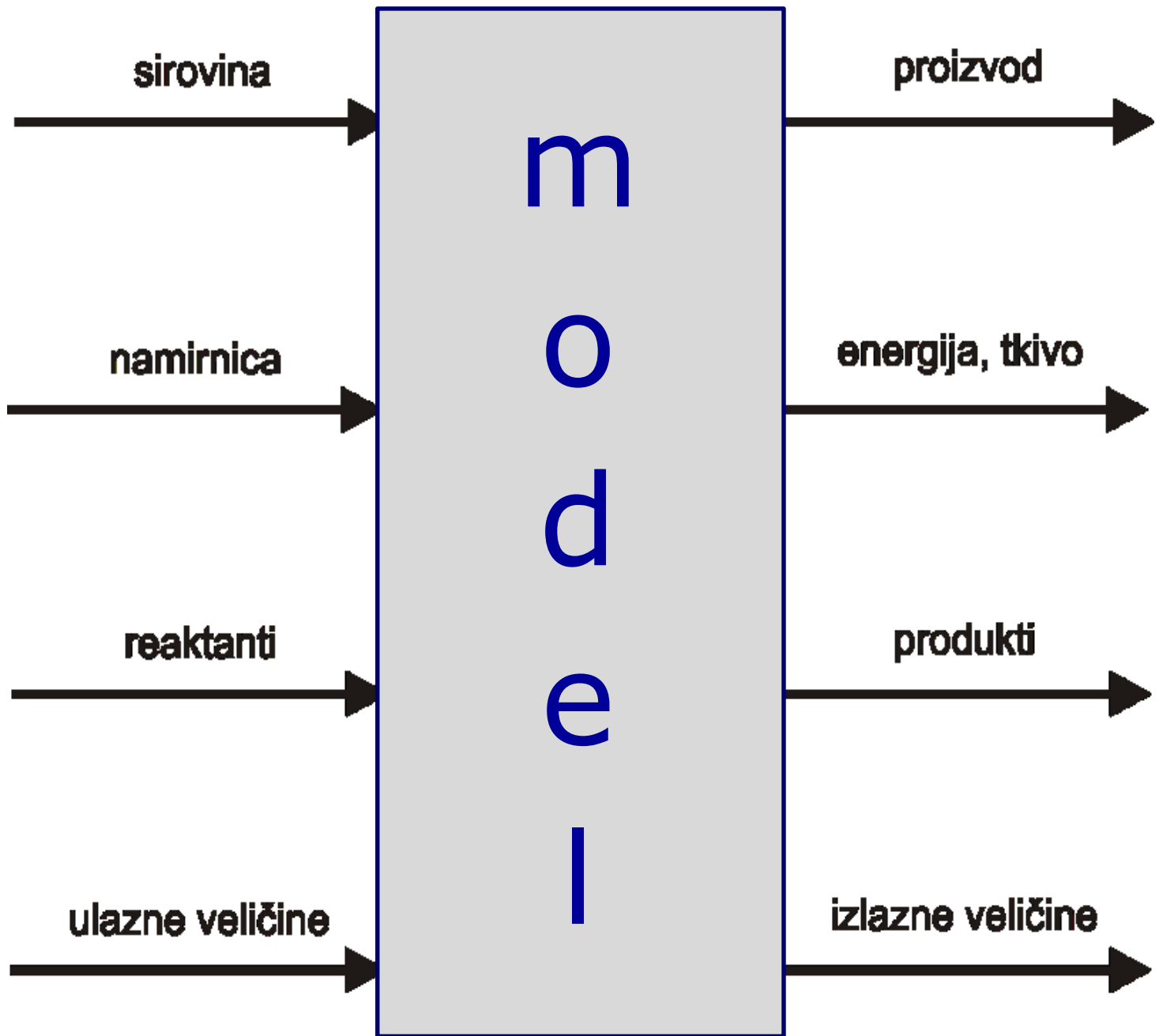


PRIMJERI:

- transportni troškovi
- optimiranje procesnih uvjeta









1. Matematičko modeliranje, optimiranje i upravljanje

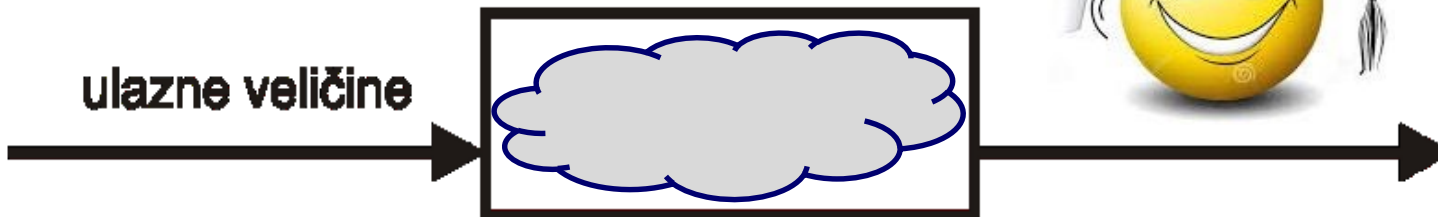
Uvod i definicije pojmova

Metodologija razvoja matematičkog modela

Podjela matematičkih modela

Numeričke metode

Računalni programi i simulacije

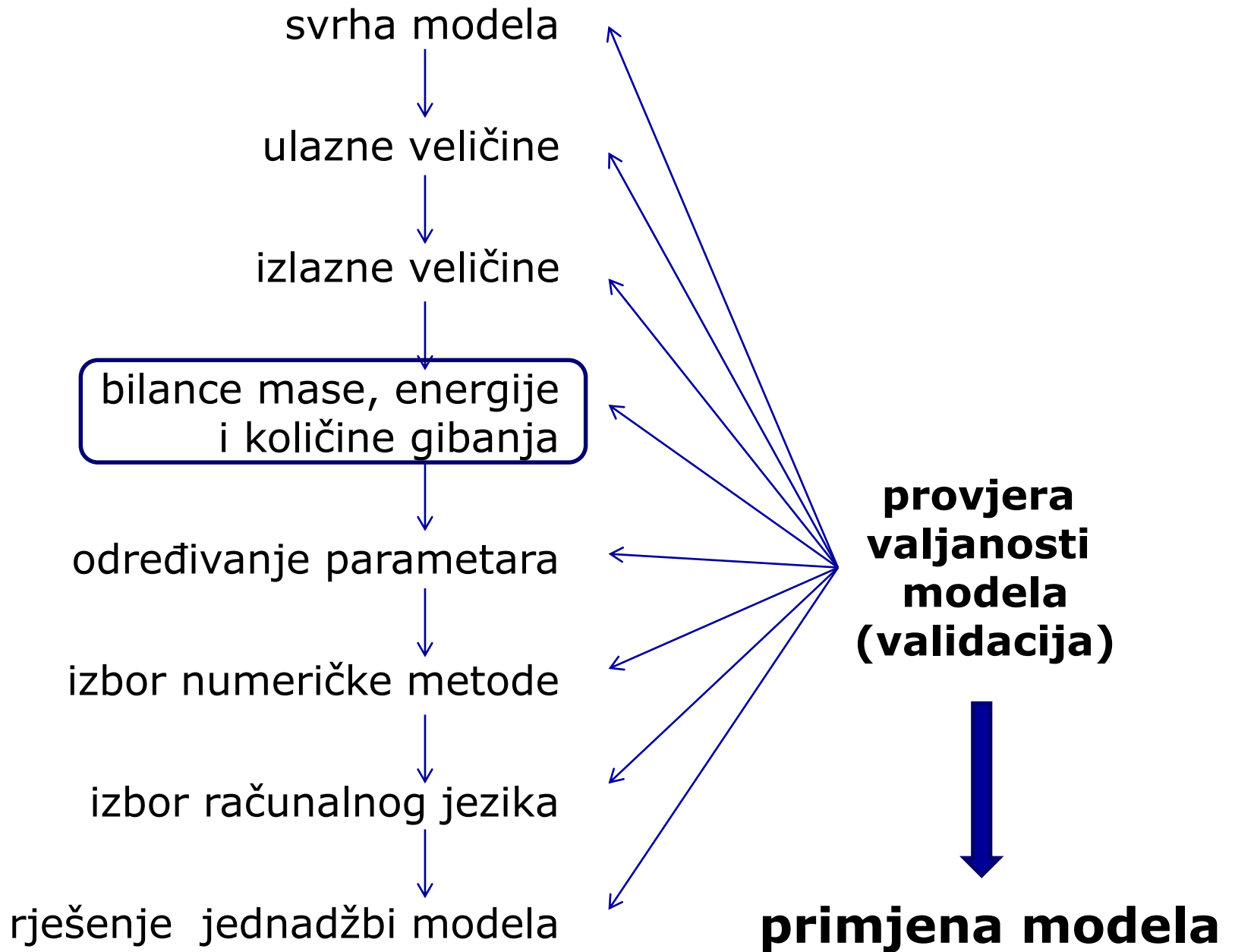


Principi razvoja matematičkog modela

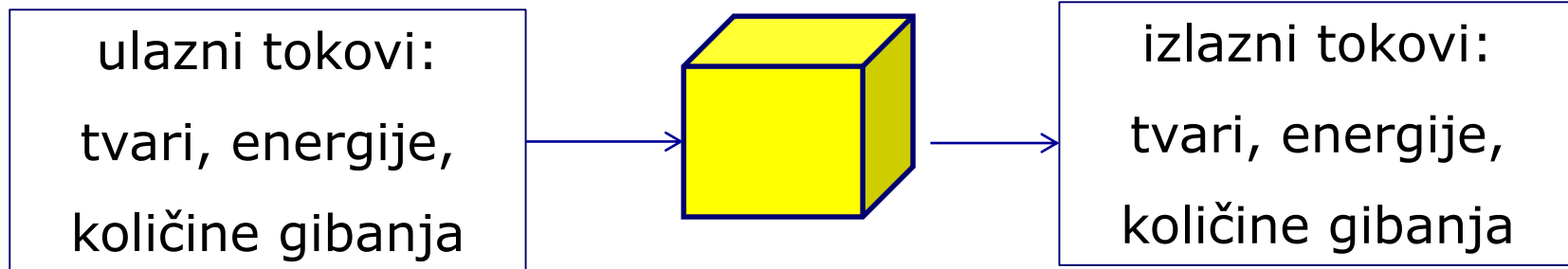
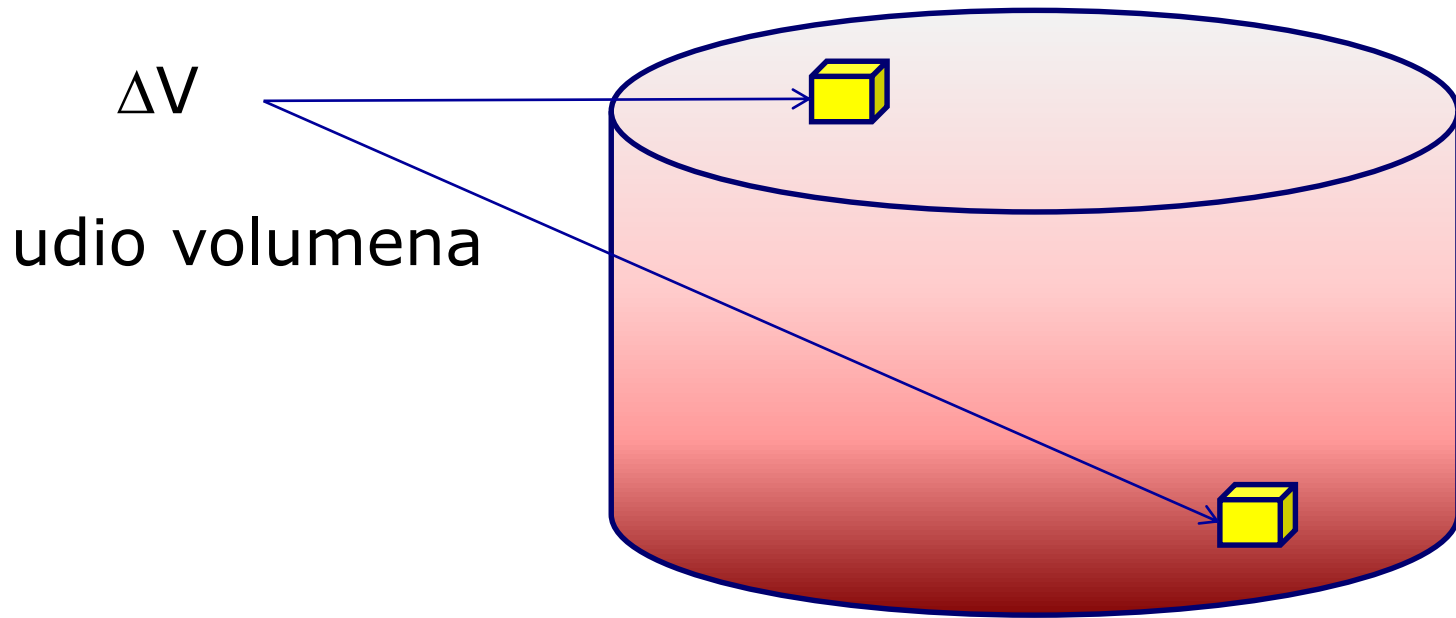
- 1) Imenovanje varijabli koje opisuju proces
(njihove vrijednosti mogu biti poznate ili nepoznate)
- 2) Opisivanje odnosa između varijabli
(određeni su fizikalnim zakonima, intuicijom, iskustvom,...)
- 3) Procjena utjecaja pretpostavki na odnos među varijablama
- 4) Opisno rješenje zadatka
(mora biti razumljivo kao i opis procesa)
- 5) Izbor matematičkih i računalnih alata
- 6) Validacija modela

Metodologija razvoja matematičkog modela





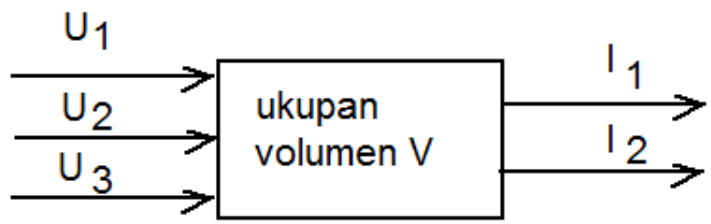
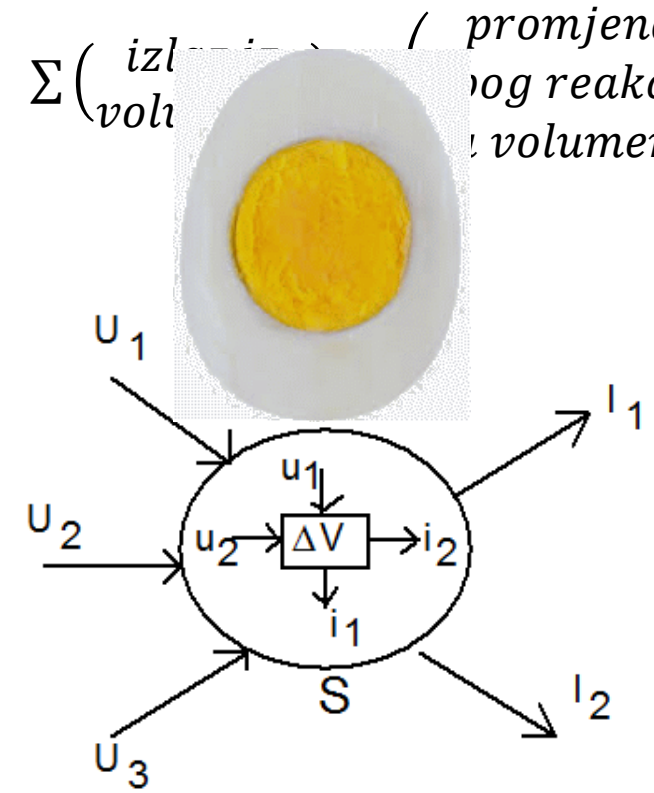
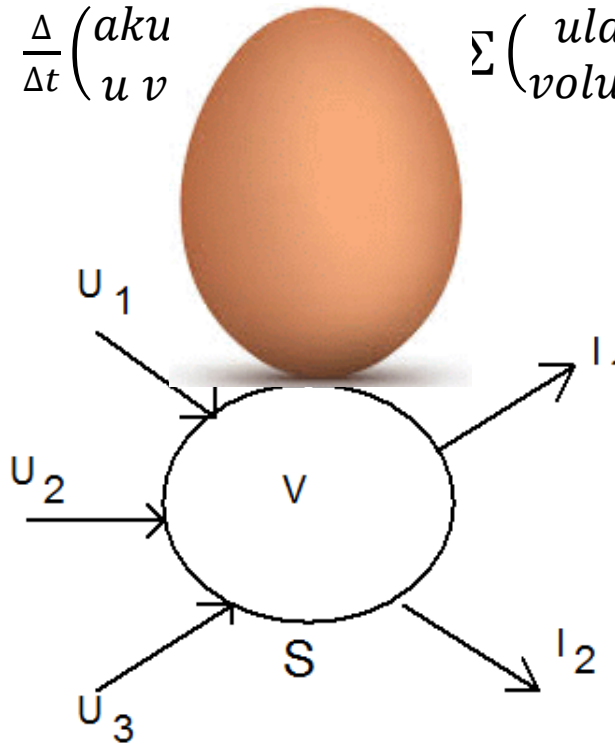
Opći princip izvođenja bilanci



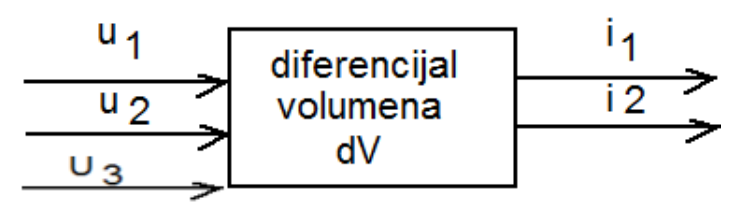
- u bilanci mase sastojka predznak (+) dolazi u slučaju kada je tvar produkt reakcije, a predznak (-) kada je tvar reaktant i u reakciji se troši
- u bilanci energije predznak (+) dolazi kada je reakcija egzotermna i stvara energiju, a predznak (-) kada je reakcija endotermna i treba joj dovoditi energiju
- oznaka Δ (grč. *delta*) označava malu ali konačnu promjenu
- **t** je oznaka za vrijeme
- Δt je mala konačna promjena vremena
- ΔS je mala konačna promjena akumulacije (sadržaja S)

- $$\frac{\Delta}{\Delta t} \left(\begin{matrix} aku \\ u v \end{matrix} \right)$$

$$\Sigma \left(\begin{matrix} ulaz u \\ volumen \end{matrix} \right) - \Sigma \left(\begin{matrix} izl \\ volu \end{matrix} \right) = \left(\begin{matrix} / \\ promjena \\ og reakcije \\ volumenu \end{matrix} \right)$$



U, I su ulazni i izlazni tokovi za ukupan volumen



u, i su ulazni i izlazni tokovi za diferencijal volumena

- modeli se razlikuju prema volumenu za koji se postavlja bilanca
- modeli s **usredotočenim ili koncentriranim** veličinama stanja = **ukupan volumen u kojem se odvija proces** (primjer: biokemijski reaktor)
- modelu s **raspodijeljenim ili distribuiranim** veličinama stanja = **samo dio cijelog volumena** (primjer: samo vanjski dio namirnice)
- modeli s usredotočenim veličinama stanja postaju sustavi običnih diferencijalnih jednažbi
- modeli s raspodijeljenim veličinama stanja postaju sustavi parcijalnih diferencijalnih jednažbi

- bilance postaju diferencijalne jednačbe kada se provede granični postupak u kojem konačne razlike/diferencije (Δ) postaju infinitezimalne veličine (diferencijali, $\Delta \rightarrow d$)

[Infinitezimalno = beskonačno malo da bi moglo biti izmjereno ili izračunato, zajednički naziv za diferencijalno i integralno računanje]

$$\lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \left(\frac{\Delta A}{\Delta t} \right) = \frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt} A$$

- PRIMJER: bilance mase reaktanta A

$$\frac{d}{dt} A = D \cdot A_0 - D \cdot A - k_1 \cdot A + k_{-1} \cdot B$$



1. Matematičko modeliranje, Optimiranje i upravljanje

Uvod i definicije pojmova
Metodologija razvoja matematičkog modela
Podjela matematičkih modela
Numeričke metode
Računalni programi i simulacije

ANALITIČKI MODELI

izvedeni iz temeljnih zakona fizike, kemije i biologije

NEANALITIČKI MODELI

- Regresijski
- Neuronske mreže
- Neizražena logika
- Ekspertni sustavi

Analitički modeli mogu biti **deterministički ili stohastički**.

Deterministički algoritam

pri svakom izvršavanju u bilo kojim uvjetima od istog unosa dolazi do istog izlaza, sljedeći svaki put identičan niz naredbi.

Stohastički algoritam

barem u jednom dijelu izvršavanja donese neku odluku slučajnim odabirom.

Klasifikacija analitičkih modela

Deterministički $y=f(t)$

Stohastički $y=f(t)$

*u fazi upravljanja
(temelje se na prirodnim zakonitostima)*

*u fazi projektiranja i u nutricionizmu
(temelje se na eksperimentalnim podacima)*

Distribuirani

Usredotočeni

Linearni
*(jednadžbe u modelu
su linearne)*

Nelinearni
*(jednadžbe u modelu
su nelinearne)*

Diskretni

*(podaci u vremenskim
intervalima tijekom
procesa)*

Kontinuirani

*(podaci u svakoj jedinici
vremena tijekom
procesa)*

Nelinearni

(krivulja)

Linearni

(pravac)

Populacijski

Usredotočeni

Distribuirani



1. Matematičko modeliranje, optimiranje i upravljanje

Uvod i definicije pojmova
Metodologija razvoja matematičkog modela
Podjela matematičkih modela
Numeričke metode
Računalni programi i simulacije

1. METODE ZA RJEŠAVANJE LINEARNIH JEDNADŽBI

Direktne metode

1. Gauss-ova eliminacija
2. Gauss-Jordan-ov postupak

Iterativne metode

3. Jacobijeva linearna iteracija
4. Gauss-Seidl-ova iteracija

Gauss-ova eliminacija

Zadan je sustav linearnih jednadžbi:

$$x + 2y - 3z = 0$$

$$2x - y + 4z = 5$$

$$3x + y - z = 2$$

Pri određivanju rješenja metodom Gauss-ove eliminacije zadani sustav jednadžbi se napiše u matričnom obliku: $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{vmatrix}$$

Rješavanje se provodi na slijedeći način:

Potrebno je načiniti proširenu matricu \mathbf{Ab} , tako da vektor rješenja pripišemo kao četvrti stupac matrici koeficijenata \mathbf{A}

$$\begin{array}{ccc|c} \mathbf{A} & & & \vec{b} \\ \hline 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array} \cdot \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} = \begin{array}{c} 0 \\ 5 \\ 2 \end{array} \quad \mathbf{A}\vec{b} = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}$$

Nad proširenom (Gaussovom) matricom provodimo **elementarne transformacije**. Množimo i dijelimo retke nekim brojem ili zbrajamo i oduzimamo od jednoga retka vrijednosti nekoga drugoga retka.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & 5 \\ 0 & -5 & 8 & 2 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{vmatrix} \sim \\
 \sim \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{vmatrix}$$

$$0 \cdot x + 1 \cdot y - 2 \cdot z = -1$$

$$y - 2 \cdot \frac{3}{2} = -1$$

$$y - 3 = -1$$

$$y = -1 + 3$$

$$y = 2$$

$$1 \cdot x + 2 \cdot y - 3 \cdot z = 0$$

$$x + 2 \cdot 2 - 3 \cdot \frac{3}{2} = 0$$

$$x + 4 - \frac{9}{2} = 0$$

$$x - \frac{1}{2} = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$z = \frac{3}{2}$$

Gauss-Jordan-ov postupak

Elementarne transformacije koje su provedene u drugom koraku rješavanja kod Gauss-ove eliminacije moguće je nastaviti sve dok na glavnoj dijagonali matrice nisu jedinice, a ostali elementi ispod i iznad dijagonale nule.

$$\left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{array} \right| \sim \left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & \frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{array} \right| \sim \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{array} \right|$$

Kada su elementi glavne dijagonale jedinice, a ispod i iznad glavne dijagonale nule rješenje je moguće očitati direktno iz matrice:

1. redak: $1 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 0.5$

2. redak: $0 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z = 2$

3. redak: $0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z = 1.5$

$$x = 0.5$$

$$y = 2$$

$$z = 1.5$$

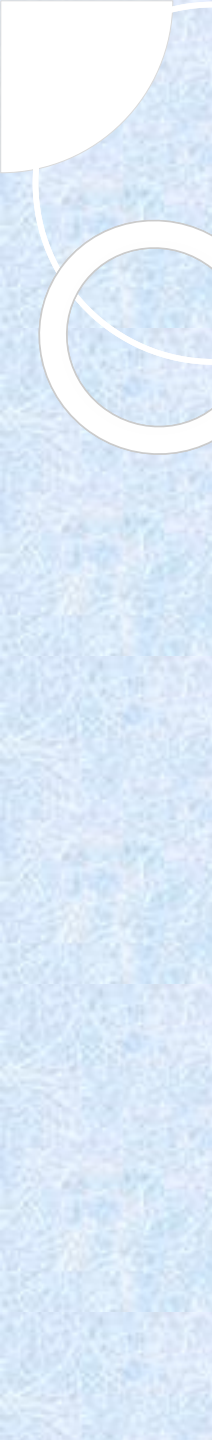
$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & -3 \\ \hline 2 & -1 & 4 \\ \hline 3 & 1 & -1 \\ \hline \end{array}
 * \begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline y \\ \hline z \\ \hline \end{array}
 = \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 5 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & A & \\ \hline \end{array}
 * \begin{array}{|c|} \hline \rightarrow \\ \hline x \\ \hline \end{array}
 = \begin{array}{|c|} \hline \rightarrow \\ \hline b \\ \hline \end{array}$$

$$\underline{x = b / A}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & A^{-1} & \\ \hline \end{array}
 * \begin{array}{|c|} \hline \rightarrow \\ \hline b \\ \hline \end{array}
 = \begin{array}{|c|} \hline \rightarrow \\ \hline x \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline -0,3 & -0,1 & 0,5 \\ \hline 1,4 & 0,8 & -1,0 \\ \hline 0,5 & 0,5 & -0,5 \\ \hline \end{array}
 * \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 5 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}
 = \begin{array}{|c|} \hline 0,5 \\ \hline 2,0 \\ \hline 1,5 \\ \hline \end{array}$$



primjer u MS Excelu

1. METODE ZA RJEŠAVANJE LINEARNIH JEDNADŽBI

Direktne metode

1. Gauss-ova eliminacija ✓
2. Gauss-Jordan-ov postupak ✓

Iterativne metode

3. Jacobijeva linearna iteracija
4. Gauss-Seidl-ova iteracija

2. METODE ZA RJEŠAVANJE NELINEARNIH JEDNADŽBI

1. Jacobijeva linearna iteracija
2. Wegstein-ova metoda
3. Newton-Raphson-ova metoda
4. Metoda sekante

3. METODE ZA INTEGRIRANJE DIFERENCIJALNIH JEDNADŽBI

EKSPPLICITNE METODE

1. Euler-ova metoda
2. Korigirana Euler-ova metoda
3. Taylor-ov razvoj reda
4. Metoda Runge-Kutta 2
5. Metoda Runge-Kutta 4

4. LINEARNO PROGRAMIRANJE

Simplex algoritam

1. Optimalno namješavanje smjese sirovina
2. Optimiranje sastava obroka
3. Optimiranje iskorištenja pogona/strojeva

1. Podjela matematičkih modela
2. Klasifikacija modela prema matematičkoj strukturi
3. Matematički alati za rješavanje jednadžbi modela



1. METODE ZA RJEŠAVANJE LINEARNIH JEDNADŽBI

Direktne metode

1. Gauss-ova eliminacija ✓
2. Gauss-Jordan-ov postupak ✓

Iterativne metode

3. Jacobijeva linearna iteracija
4. Gauss-Seidl-ova iteracija

2. METODE ZA RJEŠAVANJE NELINEARNIH JEDNADŽBI

1. Jacobijeva linearna iteracija
2. Wegstein-ova metoda (koristi sekantu)
3. Newton-Raphson-ova metoda (koristi tangentu)
4. Metoda sekante

KONVERGENCIJA METODA

Primjer nelinearne jednačbe:

$$f(x) = x - e^{-x}$$

$$f(x) = 0 \quad x = ?$$

Jacobi-jeva iteracijska formula:

$$x_{k+1} = g(x_k)$$

$$x = e^{-x}$$

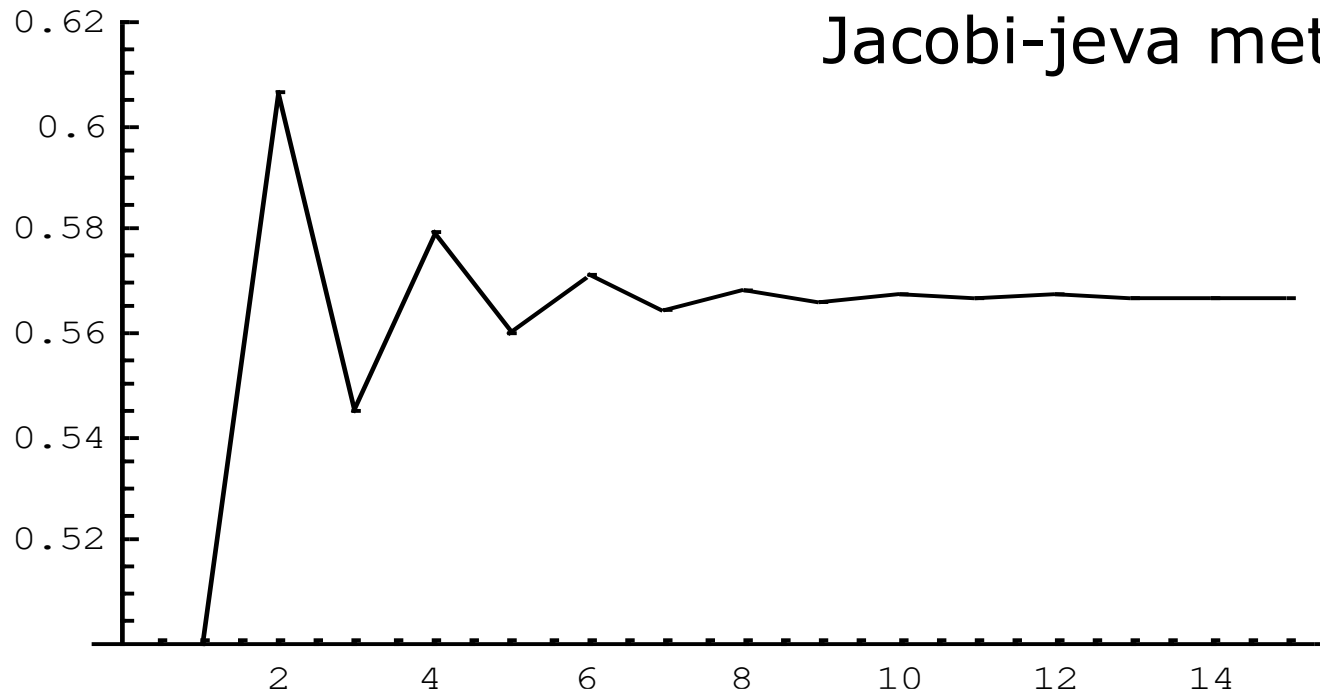
$$x_{k+1} = e^{-x_k}$$

Newton-Raphson-ova iteracijska formula:

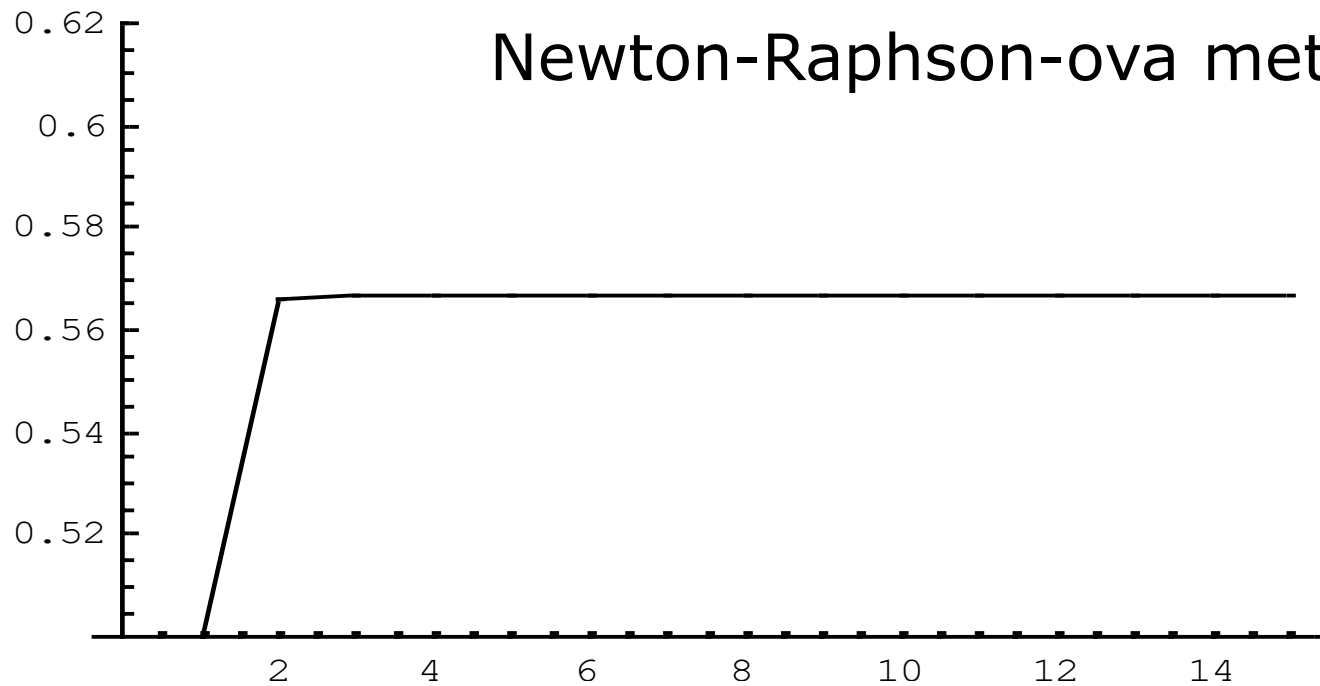
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

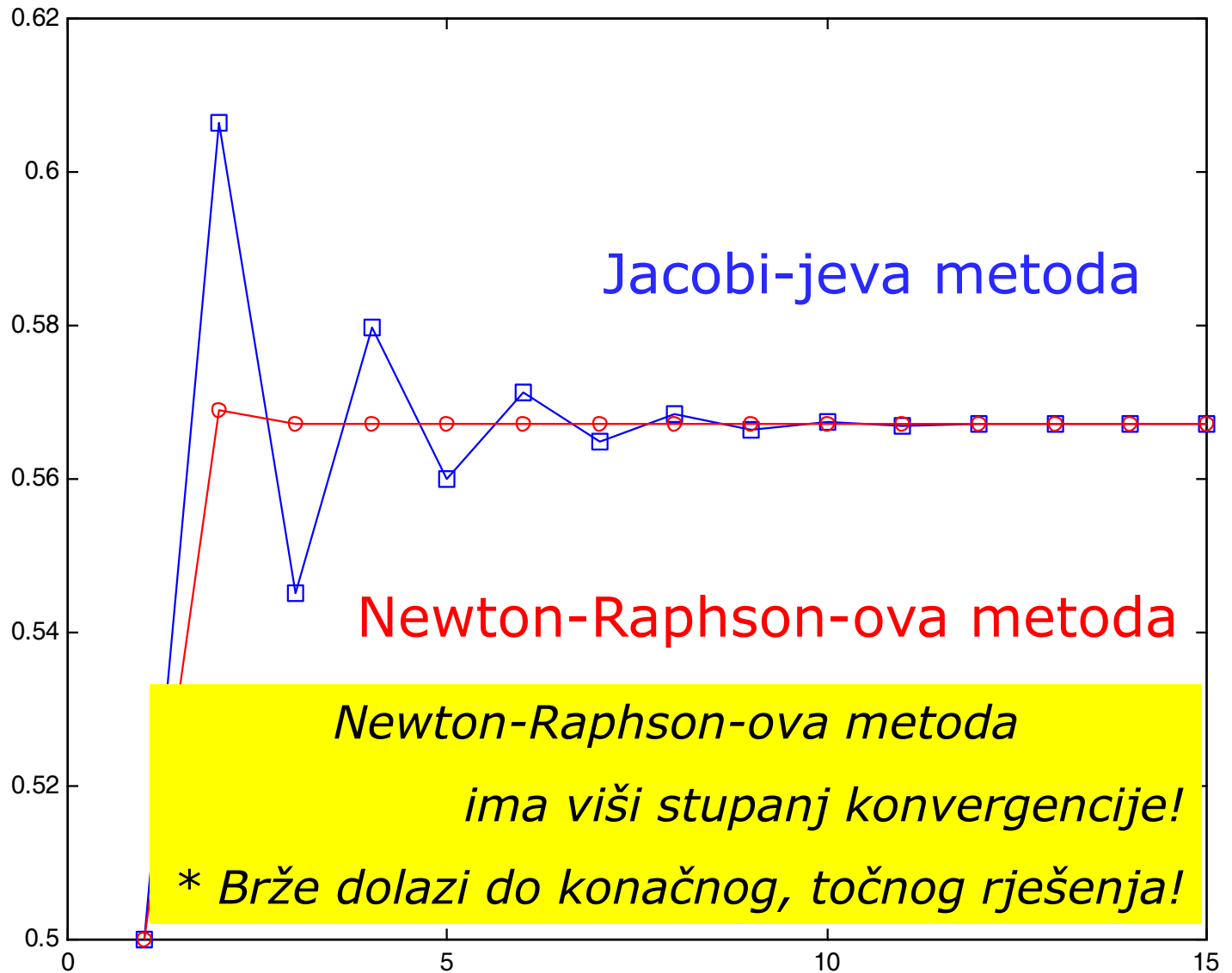
$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - e^{-x_k}}{1 + e^{-x_k}}$$

Jacobi-jeva metoda



Newton-Raphson-ova metoda





MATEMATIČKI UVJET ZA KONVERGENCIJU

Jacobi-jeva linearna iteracija

Algoritam

1. $A * x = b$

2. $x = a * x + b$

3. $x_{k+1} = a * x_k + b$

rješenje je ξ , tako da je

$$A * \xi = b$$

$$\xi = a * \xi + b$$

$$e_k = x_k - \xi$$

$$e_1 = x_1 - \xi$$

$$e_2 = x_2 - \xi = a * x_1 + b - a * \xi - b = a * e_1$$

$$e_3 = x_3 - \xi = a * x_2 + b - a * \xi - b = a * e_2 = a^2 * e_1$$

$$\dots$$
$$e_{n+1} = a^n * e_1$$

niz pogrešaka : $e_1, a * e_1, a^2 * e_1, a^3 * e_1, \dots, a^n * e_1$

Uvjet konvergencije Jacobijeve metode:

$$x_{k+1} = g(x_k) \quad \text{uvjet} \quad |g'(\xi)| < 1$$

$$x_{k+1} = a * x_k + b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a^n \cdot e_1) = 0 \text{ za svaki } e_1 \text{ ako je } |a| < 1$$

Definicija stupnja konvergencije:

$$e_{k+1} = a \cdot e_k^n$$

stupanj konvergencije

$$e_{k+1} = g'(\xi) \cdot e_k^1$$

Jacobijeva metoda ima stupanj konvergencije $n=1$

MATEMATIČKI UVJET ZA KONVERGENCIJU Newton-Raphson-ova iteracija

Poznat nam je uvjet konvergencije Jacobijeve metode

$$x_{k+1} = g(x_k) \quad \text{uvjet} \quad |g'(\xi)| < 1$$

Primijenimo isti rezultat za Newton-Raphson-ovu iteracijsku formulu

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

odgovarajuća $g(x)$ funkcija je: $g(x) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

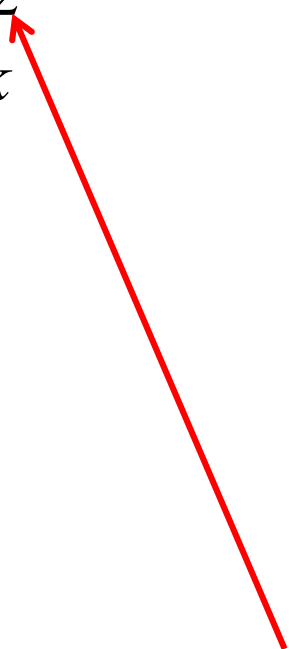
$$g(\xi) = \xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)}$$

$$g'(\xi) = 1 - \frac{f'(\xi) - f(\xi) \cdot f''(\xi)}{f'(\xi)^2}$$

lokalni uvjet konvergencije $|g'(\xi)| < 1$

$$|g'(\xi)| = \left| \frac{f(\xi) \cdot f''(\xi)}{f'(\xi)^2} \right| < 1$$

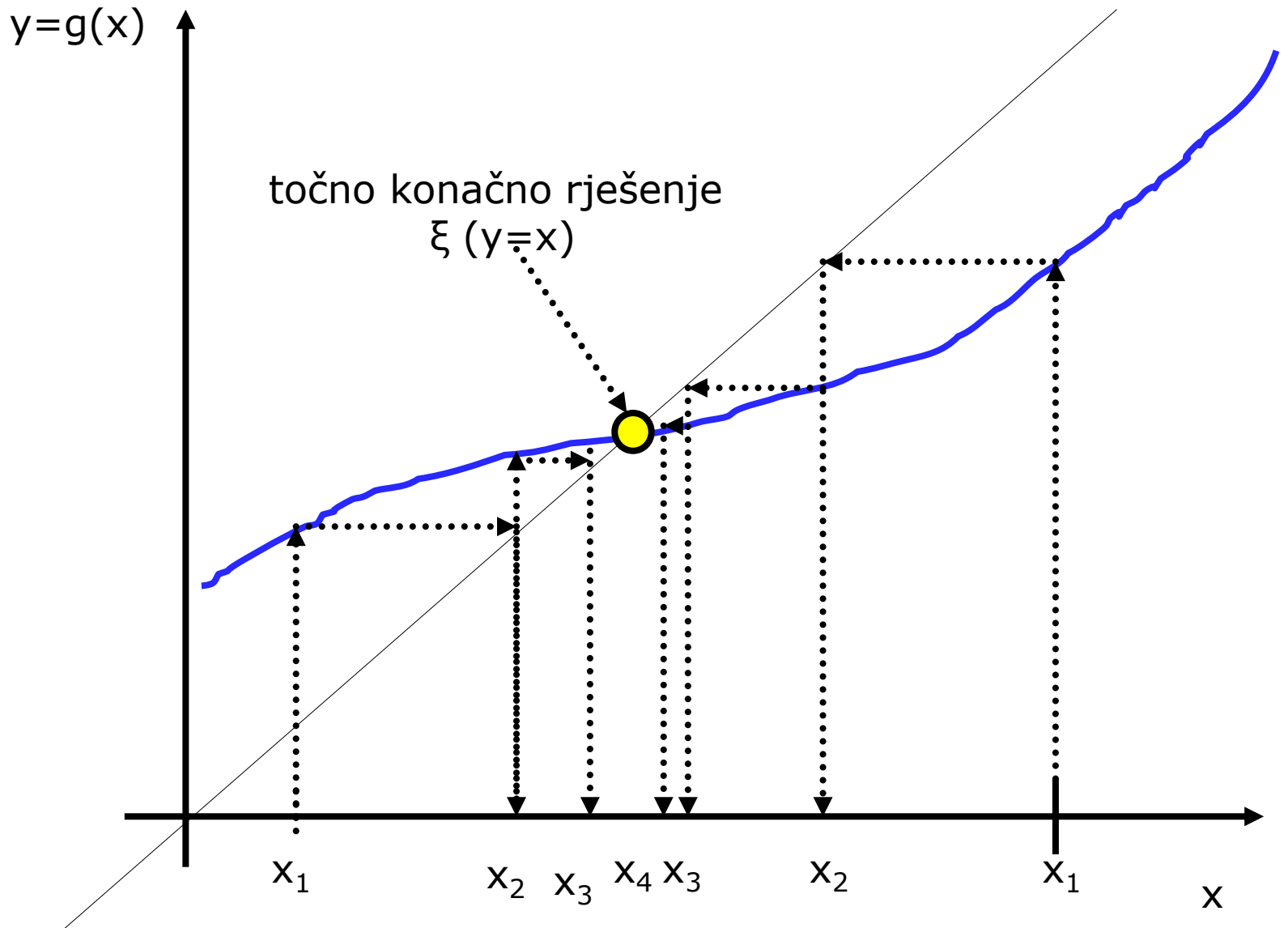
$$e_{k+1} = x_{k+1} - \xi = x_k - f(x_k) / f'(x_k) - \xi$$

$$e_{k+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} \cdot e_k^2 = c \cdot e_k^2$$


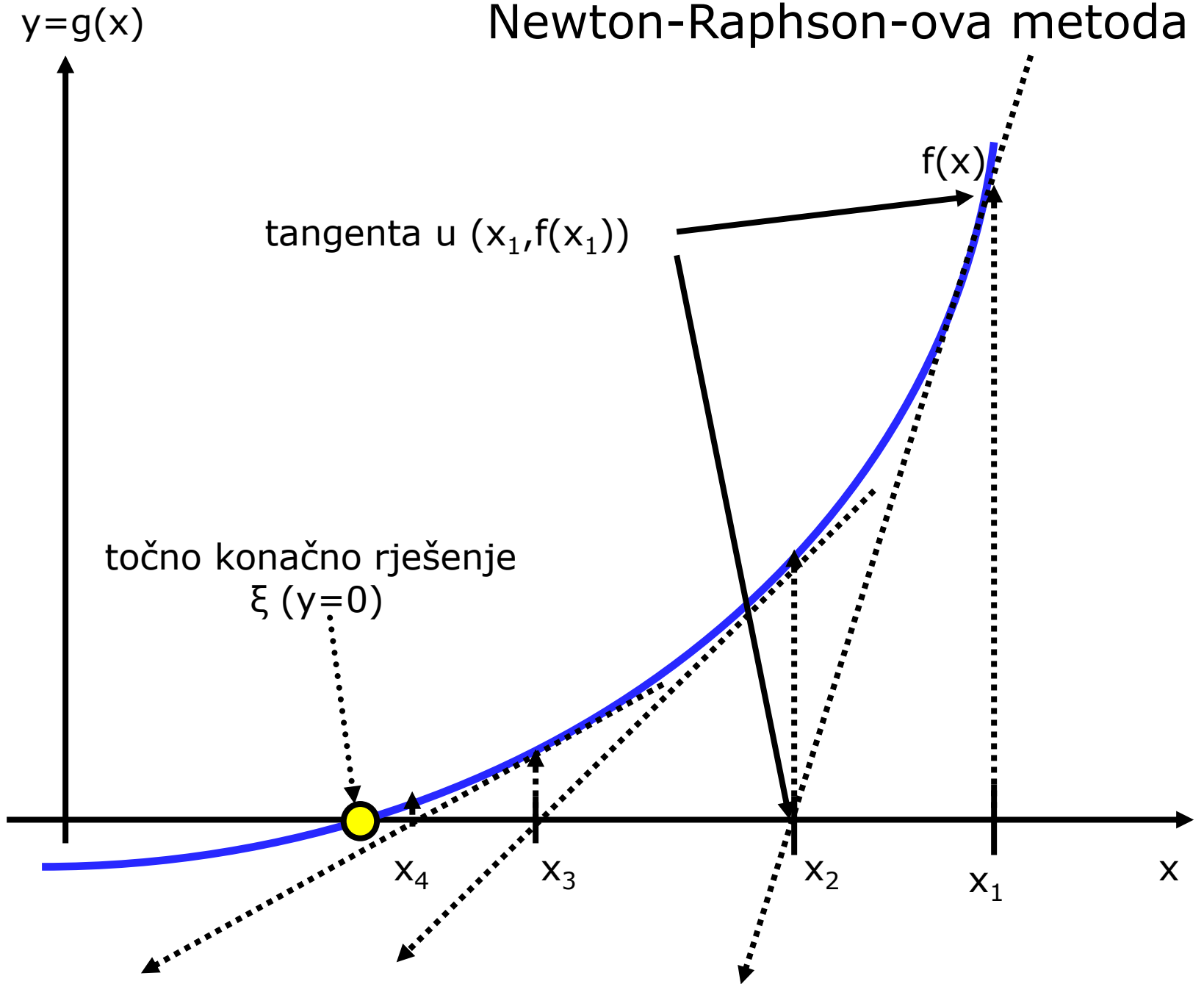
Newton-Raphson-ova metoda ima

stupanj konvergencije $n=2$

Jacobi-jeva metoda



Newton-Raphson-ova metoda



2. METODE ZA RJEŠAVANJE NELINEARNIH JEDNADŽBI

1. Jacobijeva linearna iteracija
2. Wegstein-ova metoda (koristi sekantu)
3. Newton-Raphson-ova metoda (koristi tangentu)
4. Metoda sekante

Jednadžba pravca kroz dvije točke (sekanta)

$$T_1 (x_1, g_1 = g(x_1))$$

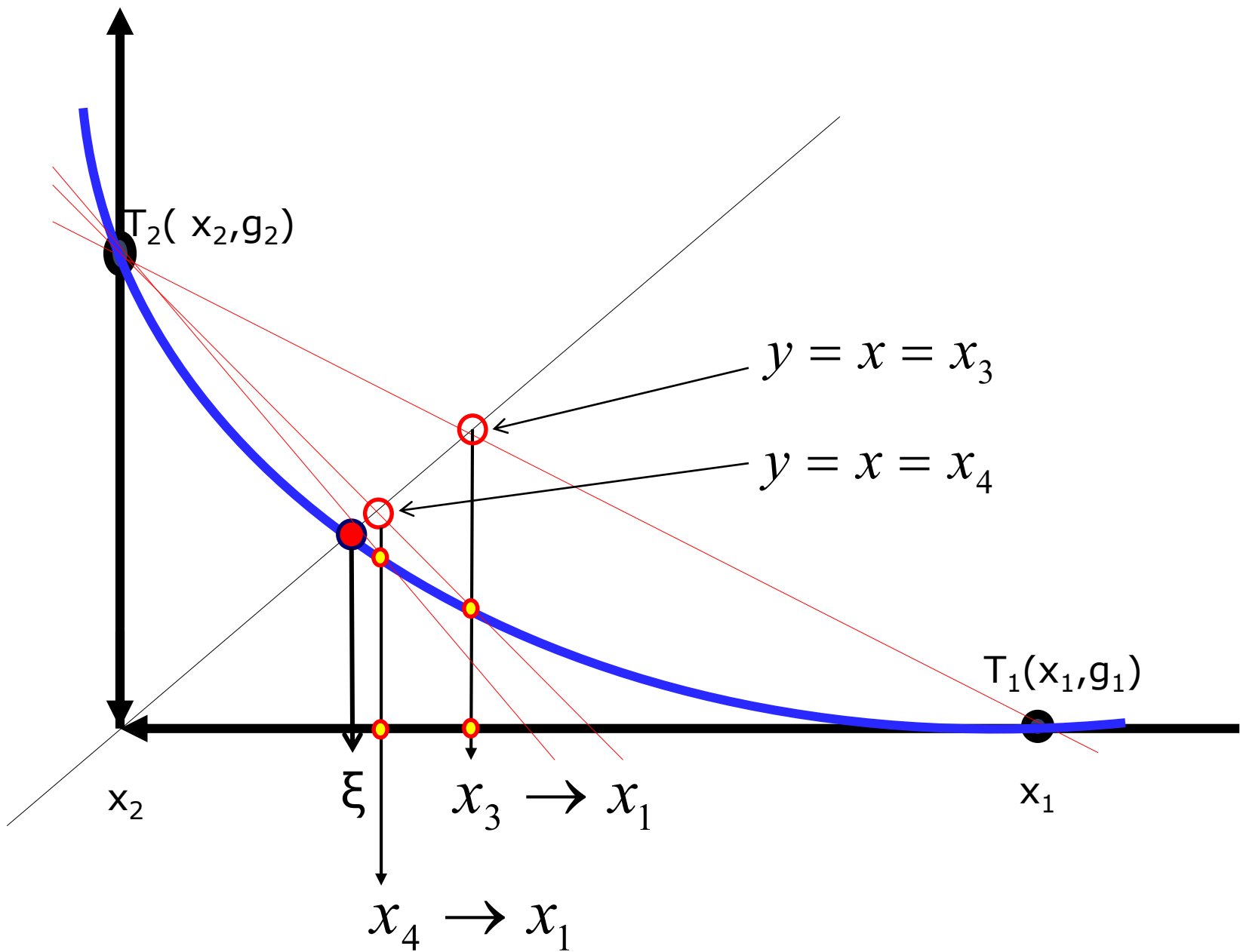
$$T_2 (x_2 = g_1, g_2 = g(x_2))$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$

$$y - g_1 = \frac{g_2 - g_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) \quad y = x = x_3$$

$$x_3 = \frac{g_1^2 - x_1 \cdot g_2}{2 \cdot g_1 - x_1 - g_2}$$

$$x_1 \leftarrow x_3$$



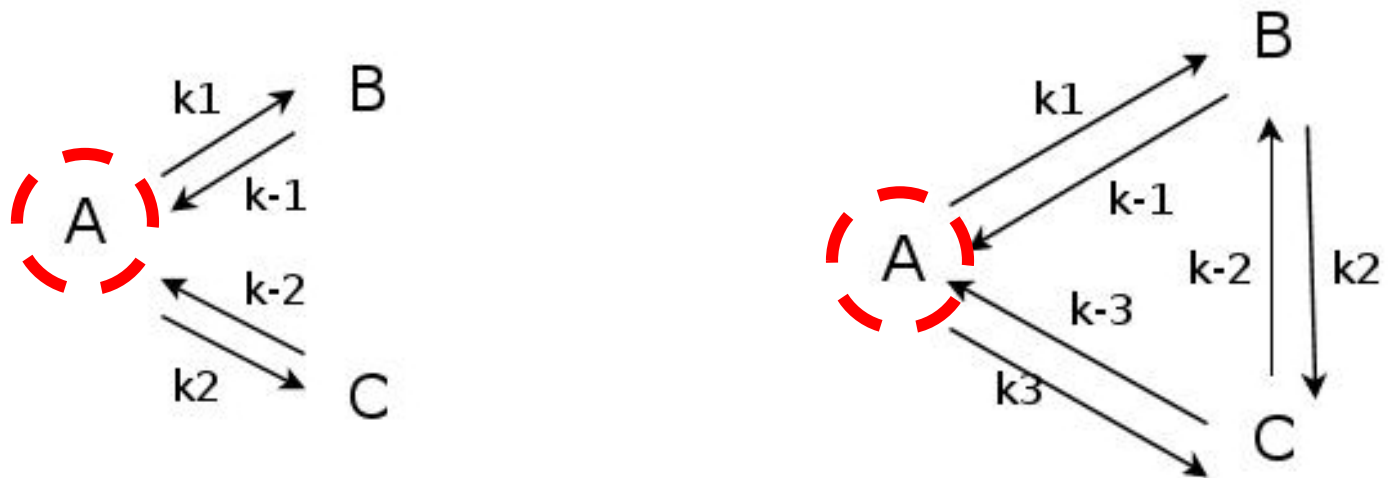
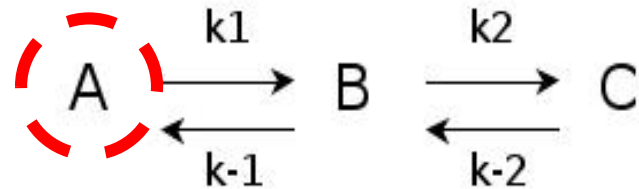


2. Matematičko modeliranje, optimiranje i upravljanje

Stacionarna stanja
kemijskih reakcijskih mehanizama

Stacionarna stanja
enzimskih reakcijskih mehanizama

Stacionarna stanja kemijskih reakcijskih mehanizama (linearni kinetički modeli)




Stacionarna stanja enzimskih reakcijskih mehanizama (linearni kinetički modeli)



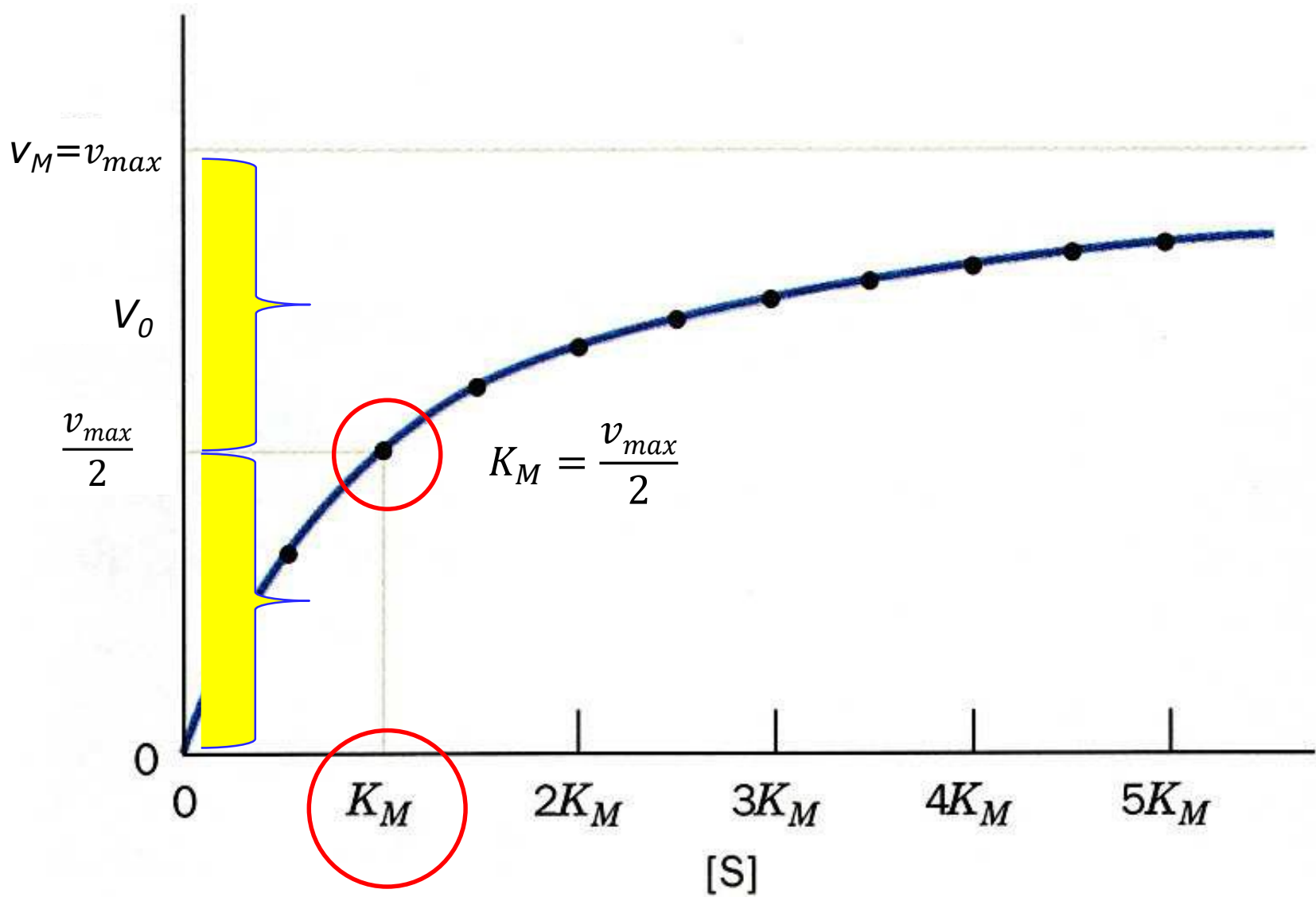
TEORIJA

- Enzimi su uglavnom proteini, a samo su neke RNK ribosomi.
- Imaju veliku katalitičku moć
(ubrzavaju reakcije 10^6 - 10^8 puta).
- Nemaju sporednih produkata, a njihova aktivnost može se kontrolirati i regulirati.

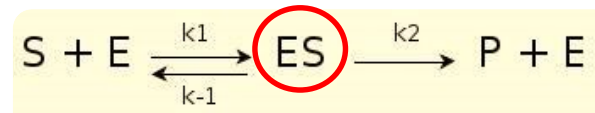
- 
- Brzina enzimski katalizirane reakcije često je *veća* od brzine te iste reakcije katalizirane nebiološkim katalizatorom.
 - Enzimi su *visokospecifični* te uglavnom **jedan enzim katalizira samo jednu reakciju pod određenim fizikalno-kemijskim uvjetima.**
 - **U organizmu postoji mnoštvo enzima** od kojih svaki pojedini katalizira određenu reakciju.
 - Reakcije su međusobno povezane unutar metabolizma.

- Michaelis-Menteničina konstanta (K_m)
numerički izražava *afinitet enzima prema supstratu*.
- K_m se definira kao ona koncentracija supstrata kod koje je brzina reakcije jednaka polovici maksimalne brzine.
- K_m ovisi o supstratu te o uvjetima okoline kao što su pH i temperatura.
- Eksperimentalno se određuje mjerenjem početne brzine reakcije (v_0) kod različitih koncentracija supstrata, dok se računski definira kao:

$$K_M = \frac{k_{-1} + k_2}{k_1}$$



Što enzim jače veže svoj supstrat, reakcija je sporija i manja je vrijednost K_M .



Bilanca enzim-supstrat kompleksa u stacionarnom stanju postaje linearna jednačba:

$$\frac{d}{dt} ES = 0 = k_1 \cdot s \cdot E - k_{-1} \cdot ES - k_2 \cdot ES$$

Riješimo ovu jednačbu po varijabli E uz uvjet $E + ES = E_0$

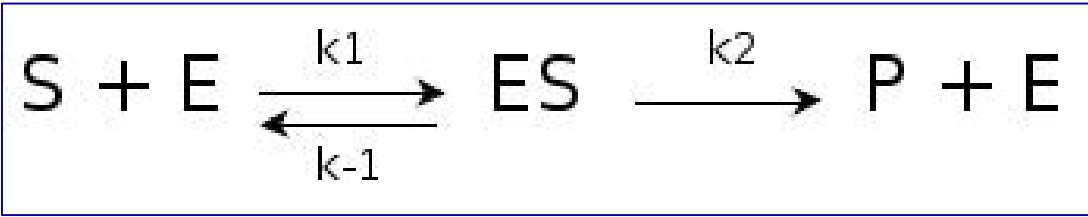
$$ES = E_0 \cdot \frac{s}{K_M + s} \quad K_M = \frac{k_{-1} + k_2}{k_1} \quad (\text{Michaelis-Menten konst.})$$

Najveća brzina reakcije bit će ostvarena kada sve molekule enzima budu u obliku ES kompleksa.

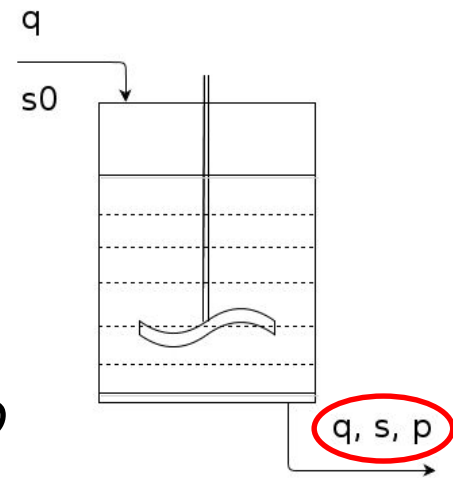
Ta brzina definirana je kao **maksimalna brzina enzimski katalizirane reakcije**, a određena je kao:

$$v_{max} = k_2 \cdot E_0$$

MODELIRANJE ENZIMSKE REAKCIJE



$$V = \text{konst.} \quad \frac{q}{V} = D$$



$$\frac{d}{dt}s = k_{-1} \cdot ES + D \cdot (s_0 - s) - k_1 \cdot s \cdot E$$

$$\frac{d}{dt}ES = k_1 \cdot s \cdot E - k_{-1} \cdot ES - k_2 \cdot ES$$

$$\frac{d}{dt}p = k_2 \cdot ES - D \cdot p$$



Ukupna količina enzima

$$E_0 = E + ES$$

u stacionarnom stanju: $\frac{d}{dt}(s, ES, p)^T = 0$

$$\frac{d}{dt}ES =$$

$$k_1 \cdot s \cdot E - k_{-1} \cdot ES - k_2 \cdot ES = 0 \quad E_0 = E + ES$$

$$\rightarrow E = E_0 - ES$$

$$k_1 \cdot s \cdot (E_0 - ES) - k_{-1} \cdot ES - k_2 \cdot ES = 0$$

$$k_1 \cdot s \cdot E_0 - k_1 \cdot s \cdot ES - k_{-1} \cdot ES - k_2 \cdot ES = 0$$

$$k_1 \cdot s \cdot E_0 - (k_1 \cdot s + k_{-1} + k_2) \cdot ES = 0$$

$$ES = \frac{k_1 \cdot s \cdot E_0}{(k_1 \cdot s + k_{-1} + k_2)}$$

$$ES = E_0 \cdot \frac{s}{\frac{k_{-1} + k_2 + k_1 \cdot s}{k_1}}$$

$$K_M = \frac{k_{-1} + k_2}{k_1}$$

$$ES = E_0 \cdot \frac{s}{K_M + s} \quad v_{max} = k_2 \cdot E_0$$

Najveća brzina reakcije bit će ostvarena kada sve molekule enzima budu u obliku ES kompleksa: $ES = E_0$

$$r = k_2 \cdot ES = k_2 \cdot E_0 \cdot \frac{s}{K_M + s} = v_{max} \cdot \frac{s}{K_M + s} = v_M \cdot \frac{s}{K_M + s}$$

$$r = k_2 \cdot ES = k_2 \cdot E_0 \cdot \frac{s}{K_M + s} = v_{max} \cdot \frac{s}{K_M + s} = v_M \cdot \frac{s}{K_M + s}$$

Uvrstimo rezultat u bilancu koncentracije supstrata u stacionarnom stanju i dobijemo izraz koji određuje **stacionarno stanje koncentracije supstrata:**

$$\frac{d}{dt}s = D \cdot (s_0 - s) + \underline{k_{-1} \cdot ES - k_1 \cdot s \cdot E}$$

$$\frac{d}{dt}s = 0 = D \cdot (s_0 - s) - v_M \cdot \frac{s}{K_M + s}$$

Koncentracija produkta u stacionarnom stanju je:

$$\frac{d}{dt}p = \underline{k_2 \cdot ES - D \cdot p} = 0$$

$$D \cdot p = k_2 \cdot ES$$

$$p = \frac{k_2}{D} \cdot ES \quad \rightarrow \underline{r = k_2 \cdot ES} = v_M \cdot \frac{s}{K_M + s}$$

$$p = \frac{v_M}{D} \cdot \frac{s}{K_M + s}$$

Odredili smo izraz za izračunavanje koncentracije produkta u stacionarnom stanju.

Da bi se primijenio algoritam Jacobi-jeve linearne iteracije, preuredimo izraz

$$0 = D \cdot (s_0 - s) - v_M \cdot \frac{s}{K_M + s}$$

u oblik $x = g(x)$, odnosno za ovaj primjer $s = g(s)$.

Preuređeni oblik bilance je tada:

$$s = s_0 - \frac{v_M}{D} \cdot \frac{s}{K_M + s}$$

Algoritam Jacobi-jevih linearnih iteracija za izračunavanje koncentracije supstrata u stacionarnom stanju dan je izrazom:

$$s_{k+1} = s_0 - \frac{v_M}{D} \cdot \frac{s_k}{K_M + s_k}$$

$$k=1, 2, \dots, N$$

indeks k je redni broj iteracije.

Uvjet konvergencije je: $|g'(s)| < 1$

Odredimo li derivaciju, uvjet konvergencije postaje:

$$\frac{v_M}{D} \cdot \frac{K_M}{(K_M + s)^2} < 1$$

Primijenimo li Newton-Raphson-ovu iteraciju

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

za bilancu supstrata u stacionarnom stanju

$$0 = D \cdot (s_0 - s) - v_M \cdot \frac{s}{K_M + s}$$

dobije se Newton-Raphson-ov izraz za izračunavanje koncentracije supstrata u stacionarnom stanju:

$$s_{k+1} = s_k + \frac{D \cdot (s_0 - s_k) - v_M \cdot \frac{s_k}{K_M + s_k}}{D + v_M \cdot \frac{K_M}{(K_M + s_k)^2}}$$

Enzim	Supstrat	T(°C)	pH	k_2 (1/s)	$1/K_M$ (M^{-1})
pepsin	carbobenzoxy-l-glutamyl-l-tyrosine ethyl ester	31,5	4,0	0,00108	530
	carbobenzoxy-l-glutamyl-l-tyrosine	31,6	4,0	0,00141	560
trypsin	benzoyl-l-argininamide	25,5	7,8	27,0	480
	chymotrypsinogen	19,6	7,5	2900	770
	sturin	24,5	7,5	13100	400
	benzoyl-arginine ester	25,0	8,0	26,7	12500
chymotrypsin	methyl hydrocinamate	25,0	7,8	0,026	256
	methyl dl- α -chlor- β phenylpropionate	25,0	7,8	0,135	83,3
	methyl d- β -phenyllactate	25,0	7,8	0,139	28,6
	methyl d- β -phenyllactate	25,0	7,8	1,38	100
	benzoyl-phenylalanine methyl ester	25,0	7,8	51,0	217
	acetyl-l-tryptophan ethyl ester	25,0	7,8	30,7	588
	acetyl-l-tyrosine ethyl ester	25,0	7,8	193	31,2

Enzim je biološki katalizator.

Enzimi su neophodni za život kakav poznajemo, jer su mnoge reakcije koje se odvijaju u stanicama organizma prespore te bi vodile do bitno drugačijih produkata koje organizmu ili ne trebaju, ili bi štetili.

Kao i svi katalizatori, enzimi funkcioniraju na način da **snižavaju energiju aktivacije pojedine reakcije**, te na taj način **reakcije ubrzavaju i do nekoliko milijuna puta**.

Enzim ostaje **nepromijenjen čitavim trajanjem reakcije** na koju utječe što mu omogućava da, kad se jedna reakcija privede kraju, uključi u drugu potpuno nepromijenjen.

Na aktivnost enzima mogu utjecati različite molekule.

Aktivatori su pak molekule koje povećavaju aktivnost enzima.

Inhibitori, prirodni ili umjetni stvoreni u laboratoriju, su molekule koji ili umanjuju aktivnost enzima, ili je potpuno uništavaju.

Neki su inhibitori korisni, a neki su štetni i opasni.

Mnogi lijekovi su ustvari **inhibitori** enzima.

Npr. aspirin je inhibitor enzima koji rezultira stvaranjem prostaglandina (inflamatorna molekula), te tako stopira bol i inflamaciju.

Otrov cijanid deaktivira enzim citokrom C oksidazu i na taj način blokira stanično disanje.

Da u ljudskom tijelu nema enzima, umri bismo.

Enzimi služe kao katalizatori biokemijskih reakcija.

Bez njih ne bismo mogli izvoditi vitalne reakcije poput kopiranja DNK i probave hrane.

Također su potrebni da bi se dogodila kataliza, koja tijelu daje količinu aktivacijske energije.

Proteinski enzimi čine veliku većinu enzima u ljudskom tijelu.

Katabolizam – proces koji oslobađa energiju u našem tijelu.

Velike molekule iz hrane (ugljikohidrati, masti i bjelančevine) razgrađuju se na manje molekule.

Tako nastaje energija koja osigurava gorivo za metaboličke, toplinske i mehaničke procese (održavanje tjelesne temperature i gibanje mišića).

Katabolizam bjelančevina – enzimi ?

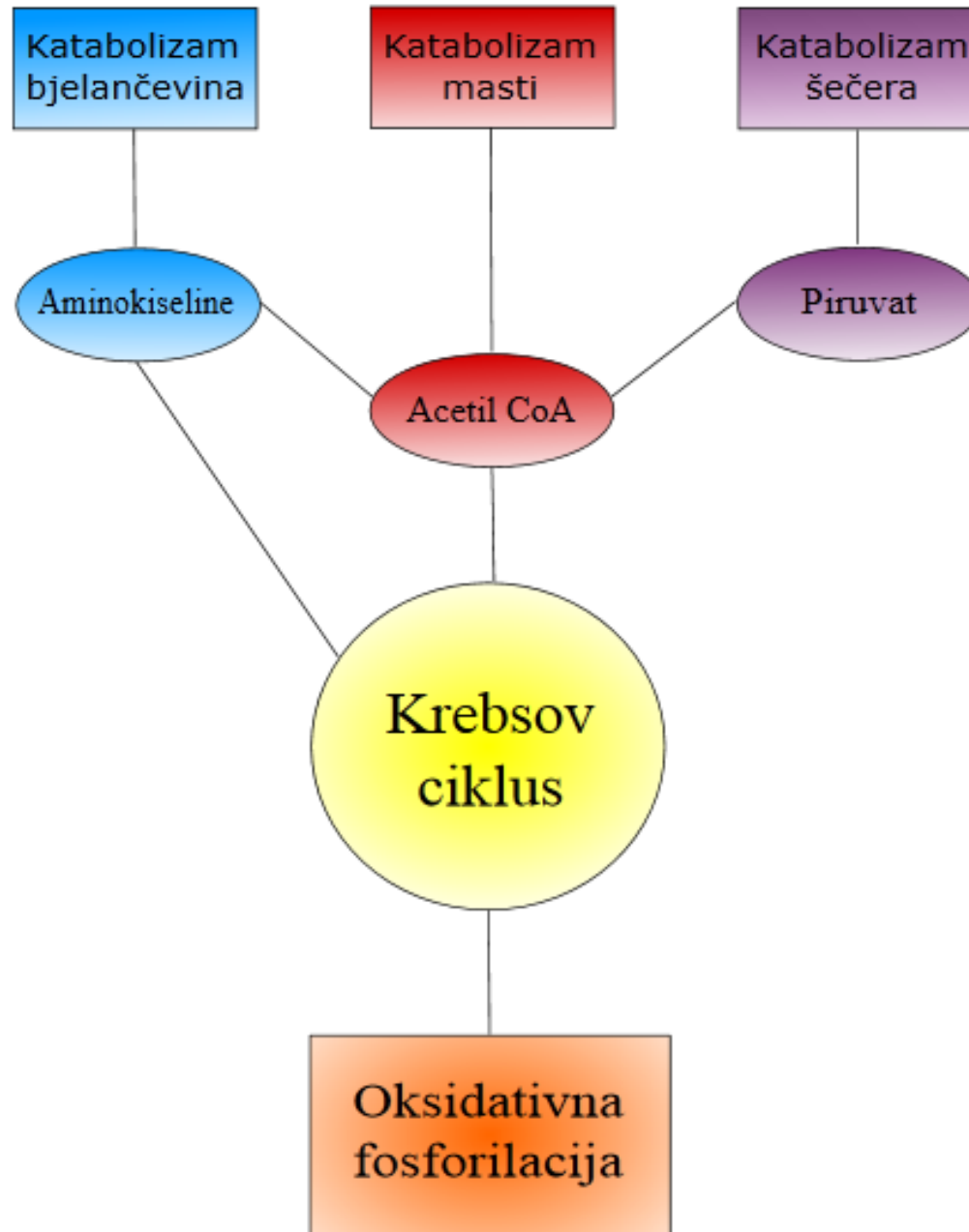
pepsin, tripsin, chymotripsin, aminopeptidaze, ...

Katabolizam masti – enzimi ?

lipaze, dehidrataza, hidrolaza, oksidaza, transferaza, ...

Katabolizam ugljikohidrata – enzimi ?


glikolaza, laktaza, dehidrogenaza, sintetaza, ...



Supstrati, enzimi i produkti u Krebsovom ciklusu

	Supstrat	Koenzim	Enzim	Vrsta reakcije	Inibitori	Aktivatori	Produkt
1	oksalacetat	acetil-CoA, voda	citrat sintetaza	kondenzacija	citrat, NADH, sukcinil-CoA	-	citrat
2a	citrat	-	akonitaza	dehidracija	-	-	Izocitrat
2b	cis-akonitat	voda		hidracija	-	-	cis-akonitat, voda
3a	izocitrat	NAD ⁺	izocitrat dehidrogenaza	oksidacija	NADH, ATP	Ca ²⁺ , ADP	α-ketoglutarat, CO ₂
3b	oksalsukcinat	H ⁺		dekarboksilacija			oksalsukcinat, NADH
4	α-ketoglutarat	NAD ⁺ , CoA-SH	α-ketoglutarat dehidrogenaza	oksidativna dekarboksilacija	NADH, sukcinil-CoA	Ca ²⁺	sukcinil-CoA, NADH, CO ₂
5	sukcinil-CoA	GDP, fosfat	sukcinil-CoA sintetaza	fosforilacija	-	-	sukcinat, GTP, CoA-SH
6	sukcinat	FAD	sukcinat dehidrogenaza	oksidacija	-	-	fumarat, FADH ₂
7	fumarat	voda	fumaraza	hidracija	-	-	L-malat
8	L-malat	NAD ⁺	malat dehidrogenaza	oksidacija	-	-	oksalacetat, NADH

Izvor: Wikipedia: Krebsov ciklus. 2012. http://hr.wikipedia.org/wiki/Krebsov_ciklus [4.11.2012.]

- 
- Prepoznajete li važnost enzima u prehrambenom inženjerstvu?
 - A važnost enzima u metaboličkim procesima?
 - Imate li ideju kako ubrzati probavu (metaboličke procese)?
 - Zašto žvačemo hranu?
 - Zašto je uz meso i masnu hranu dobro jesti salatu?
 - Razumijete li sada važnost temperature vode u perilici pri pranju deterdžentom s dodatkom enzima?

Jacobi-jev iterativni izraz za izračunavanje koncentracije supstrata u stacionarnom stanju:

$$s_{k+1} = s_0 - \frac{v_M}{D} \cdot \frac{s_k}{K_M + s_k}$$

Newton-Raphson-ov iterativni izraz za izračunavanje koncentracije supstrata u stacionarnom stanju:

$$s_{k+1} = s_k + \frac{D \cdot (s_0 - s_k) - v_M \cdot \frac{s_k}{K_M + s_k}}{D + v_M \cdot \frac{K_M}{(K_M + s_k)^2}}$$

Kada odredimo koncentraciju supstrata, uvrstimo ju u izraz za koncentraciju produkta u stacionarnom stanju:

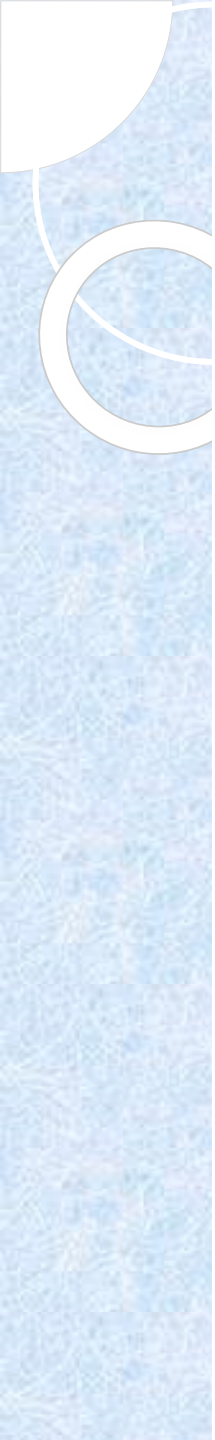
$$p = \frac{v_M}{D} \cdot \frac{s}{K_M + s}$$

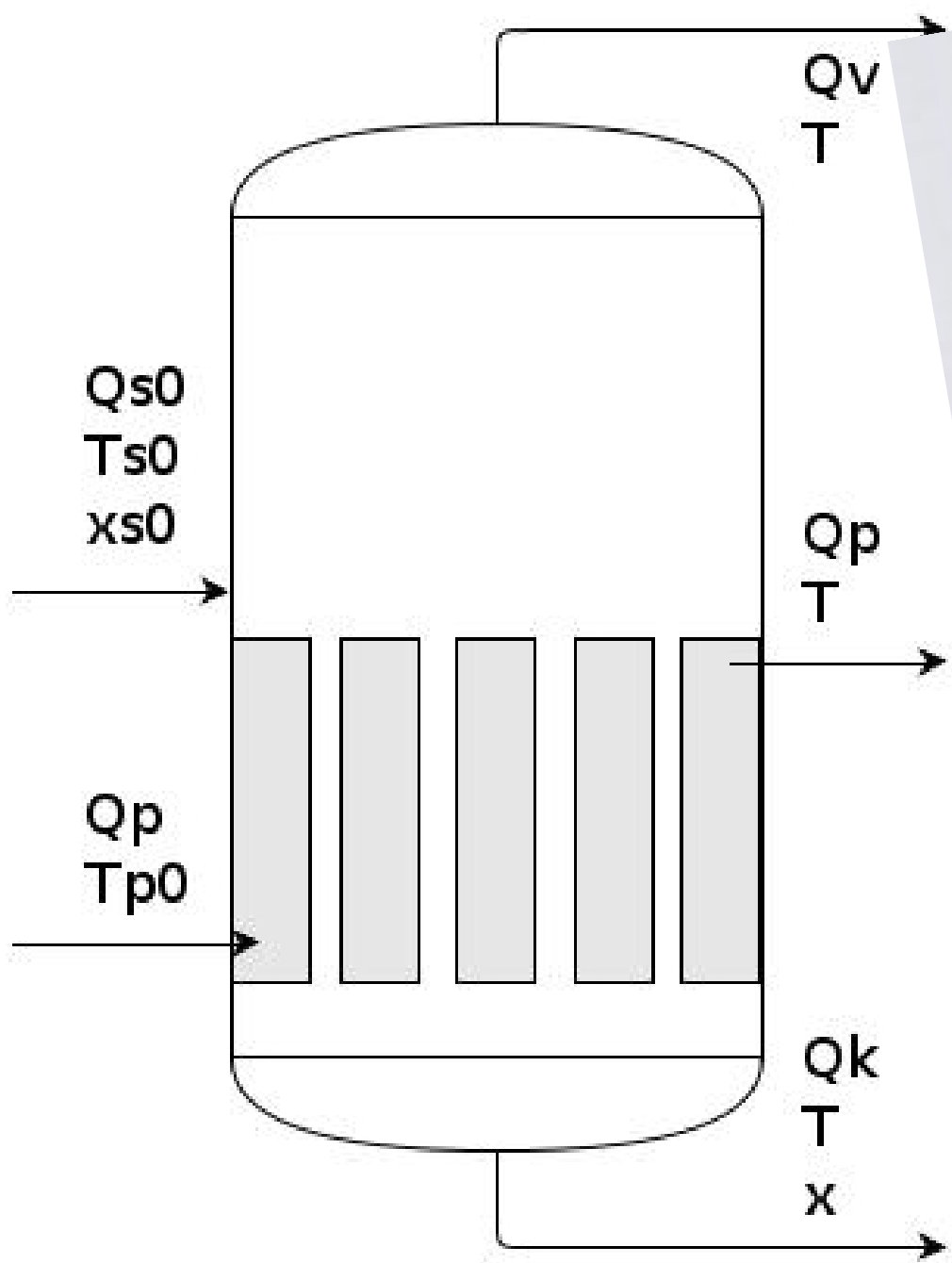


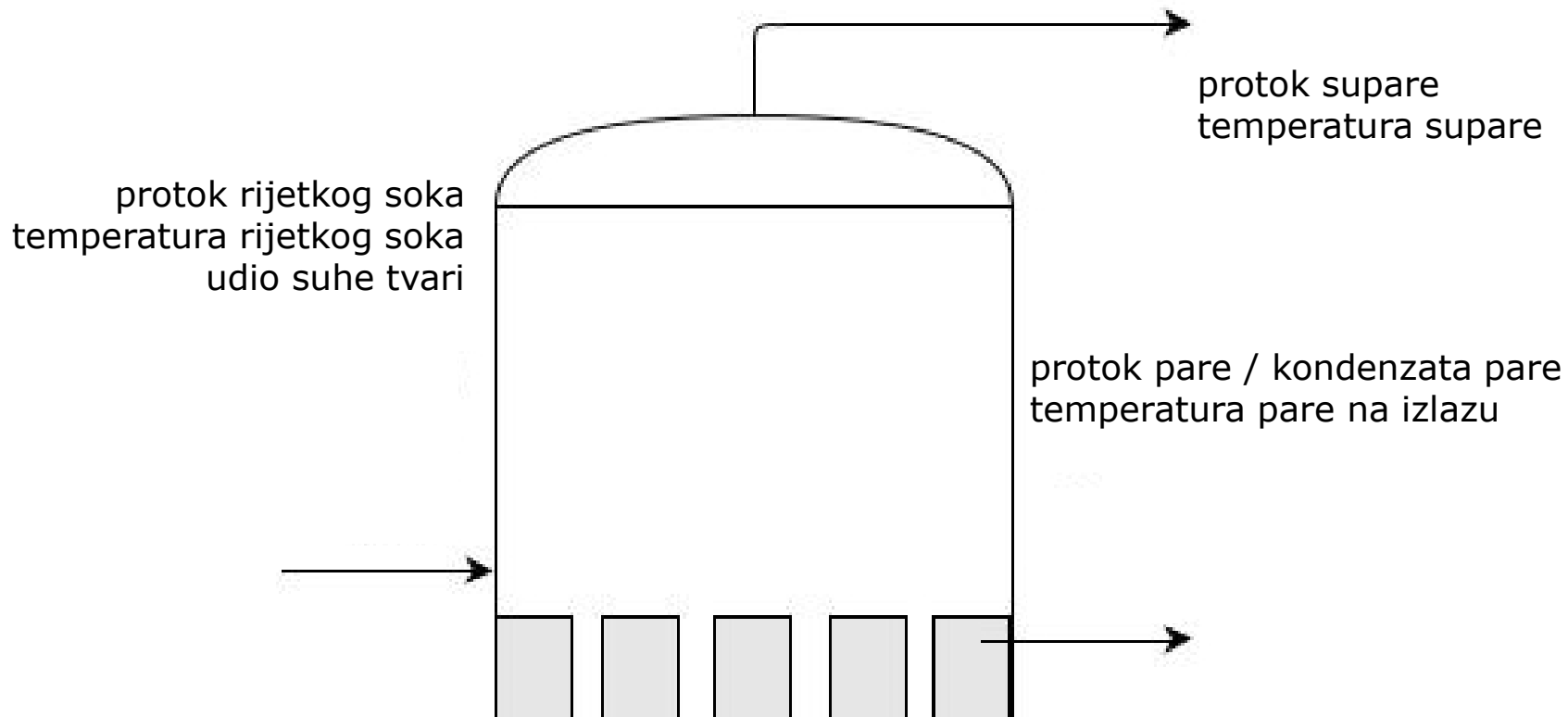
2.3. Matematički modeli nelinearnih sustava i njihovih stacionarnih stanja

Model stacionarnih i dinamičkih stanja pH
u protočnom reaktoru

Model jednostrukog uparivača
i uparne stanice s tri stupnja uparivanja

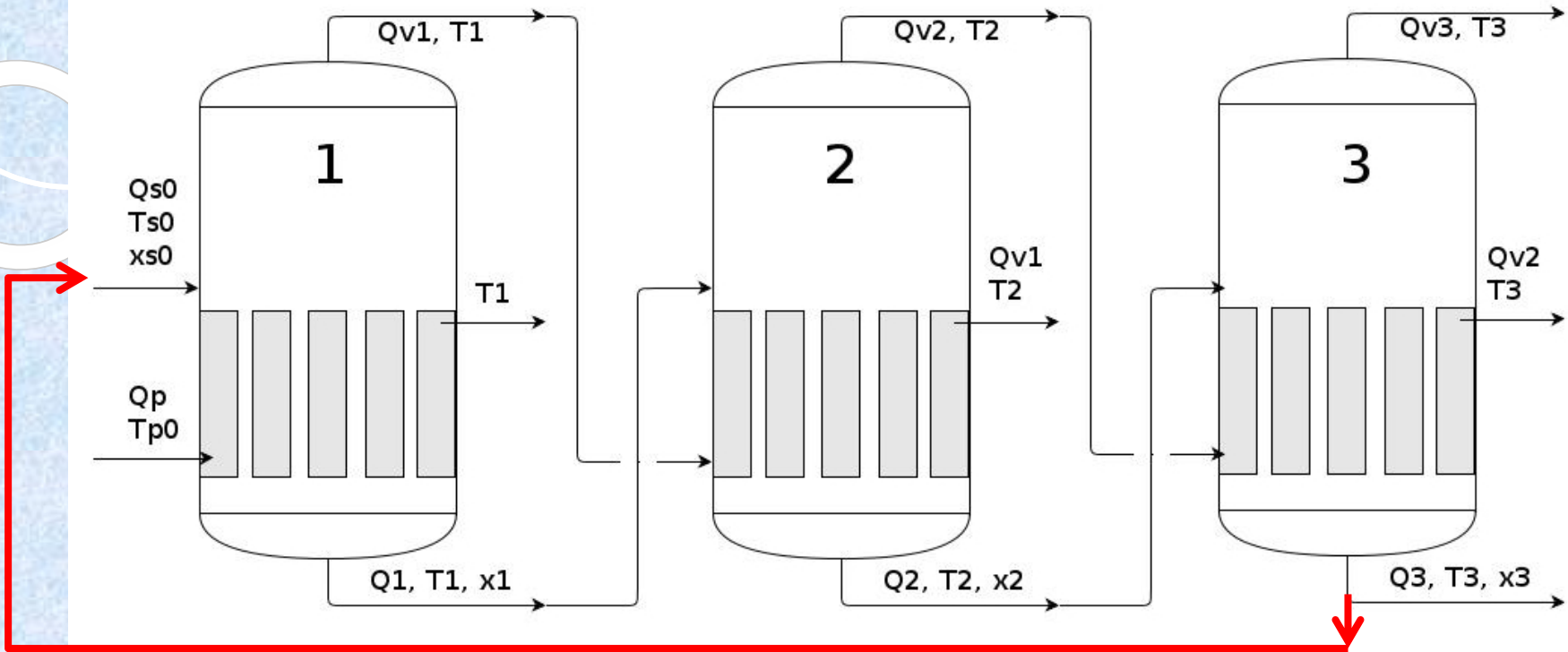
- 
- I nelinearni sustavi imaju stacionarna stanja





$$\text{efikasnost uparavanja} = \frac{Q_V}{Q_P}$$

Proces se projektira i vodi tako da se postigne **maksimalna efikasnost uparavanja**, za zadane vrijednosti udjela suhe tvari u u rijetkom (ulazna sirovina) i koncentriranom soku (proizvod), **uz maksimalno zadržavanje kakvoće proizvoda**.



kriteriji optimalnog upravljanja

$$\max \left[f(Q_P, T_P) = \frac{Q_V}{Q_P} \right]$$

$$\frac{d}{dt} (\text{nutrijenti}_0) \cong 0$$

Pritok rijetkog soka

Izvor:
Discover Engineering
https://www.youtube.com/watch?v=N7iIzKA5xh8&ab_channel=Howden

Pritok pare

Isparivač

Odzračivanje
Izlaz kondenzata
pare

Izlaz koncentrata

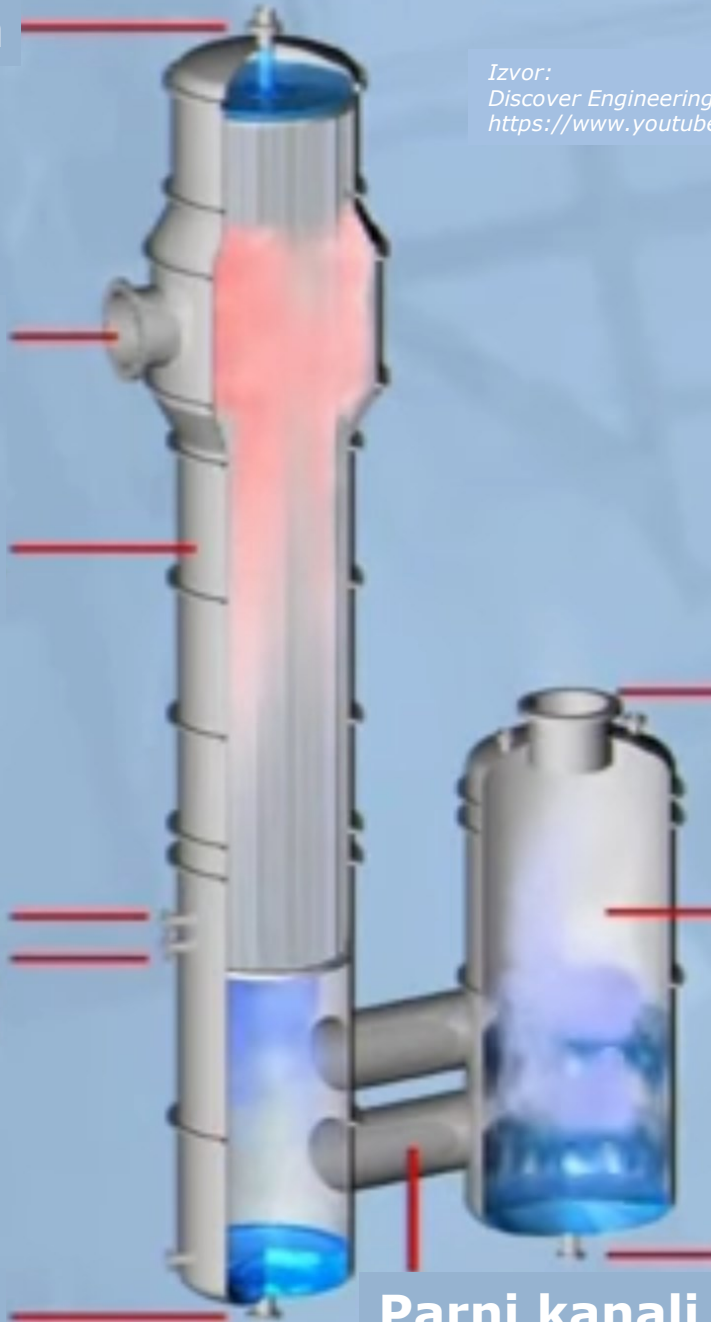
Izlaz pare

Separator

Izlaz koncentrata

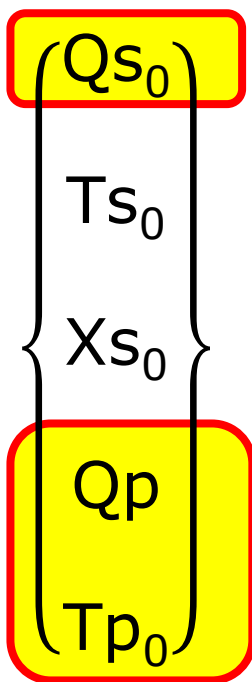
Parni kanali

Animation: INware

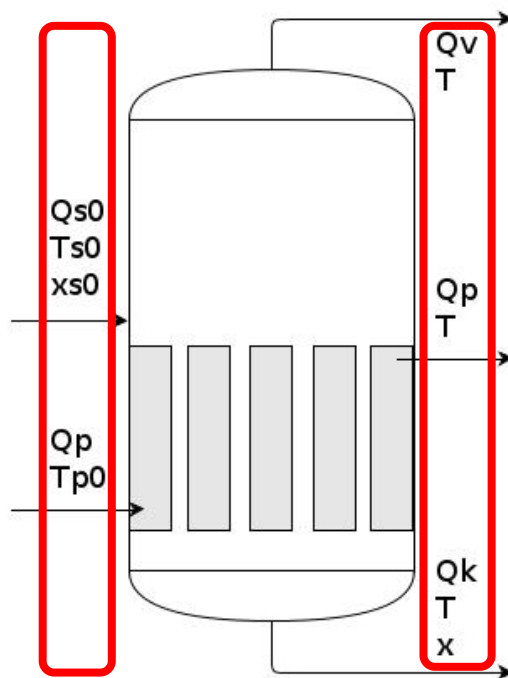


ulazne veličine

izlazne veličine



upravljačke veličine



veličine stanja

Tehnološke značajke procesa

- proces je skup jer su potrebne velike količine pare (energije)
- odvija se na visokoj temperaturi
- može doći do degradacije proizvoda
(*smanjenje nutritivne vrijednosti i organoleptičkih svojstava*)
- **proces je nelinearan**
- bilance je relativno jednostavno modelirati
- ali teško je matematički izraziti koeficijent prijenosa topline za newton-ovsku tekućinu s promjenjivim udjelom suhe tvari
- **proizvod je suha tvar** koju tijekom procesa koncentriramo
- **proces vodimo optimirajući djelatvornost uparavanja**
- djelatvornost je **omjer protoka supare i protoka zasićene pare**

- složenost određivanja koeficijenta prijenosa topline zbog promjenjivog udjela suhe tvari čini model zahtjevnim
- maseni udio suhe tvari bitno utječe na reološka i termofizička svojstva koncentrata (specifičnu toplinu, koeficijent toplinske vodljivosti i toplinski difuzivitet)
- **funkcionalna ovisnost navedenih parametara o udjelu suhe tvari** određuje se na temelju eksperimentalnih istraživanja u laboratorijskim uvjetima, **nelinearna je** i ima oblik krivulje
- na temelju izmjerenih podataka izrađuju se regresijski modeli
- nelinearni regresijski modeli točnije aproksimiraju krivulju

Linearni model (lin. regresija)

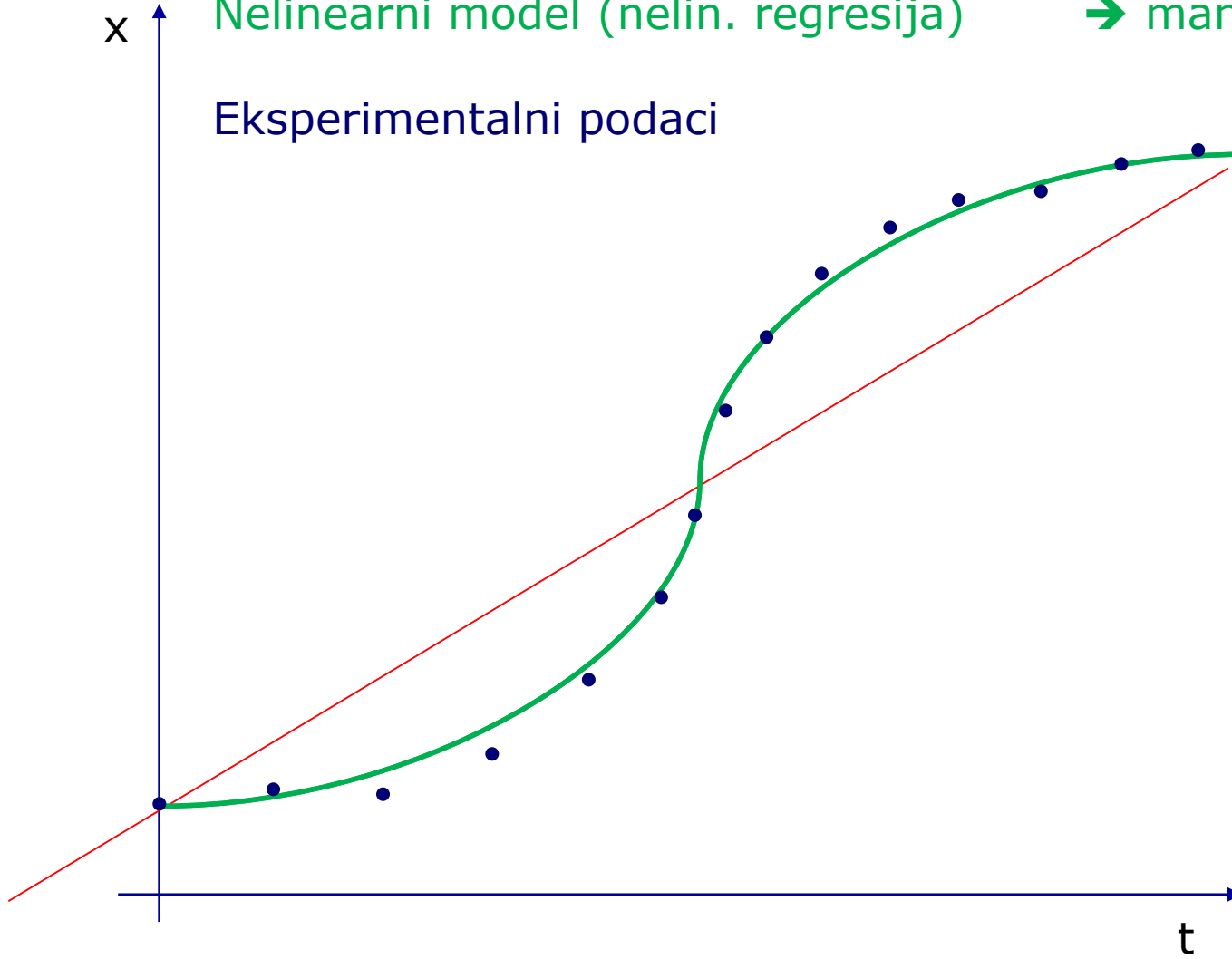
→ velika pogreška

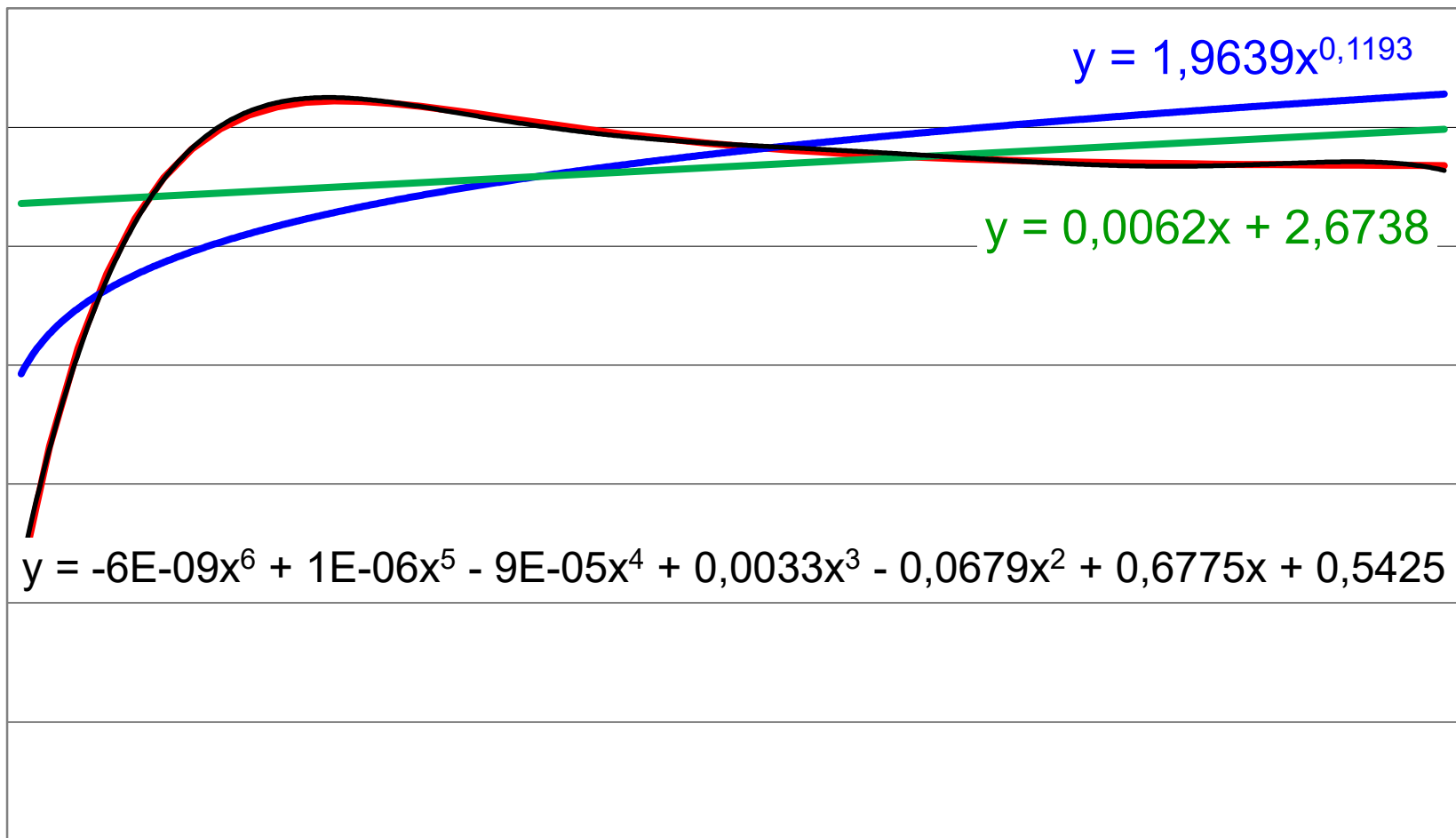
Nelinearni model (nelin. regresija)

→ manja pogreška

x

Eksperimentalni podaci





- Krivulja zadane funkcije
- Eksponencijalna regresija
- Linearna regresija
- Polinomna regresija 6. stupnja

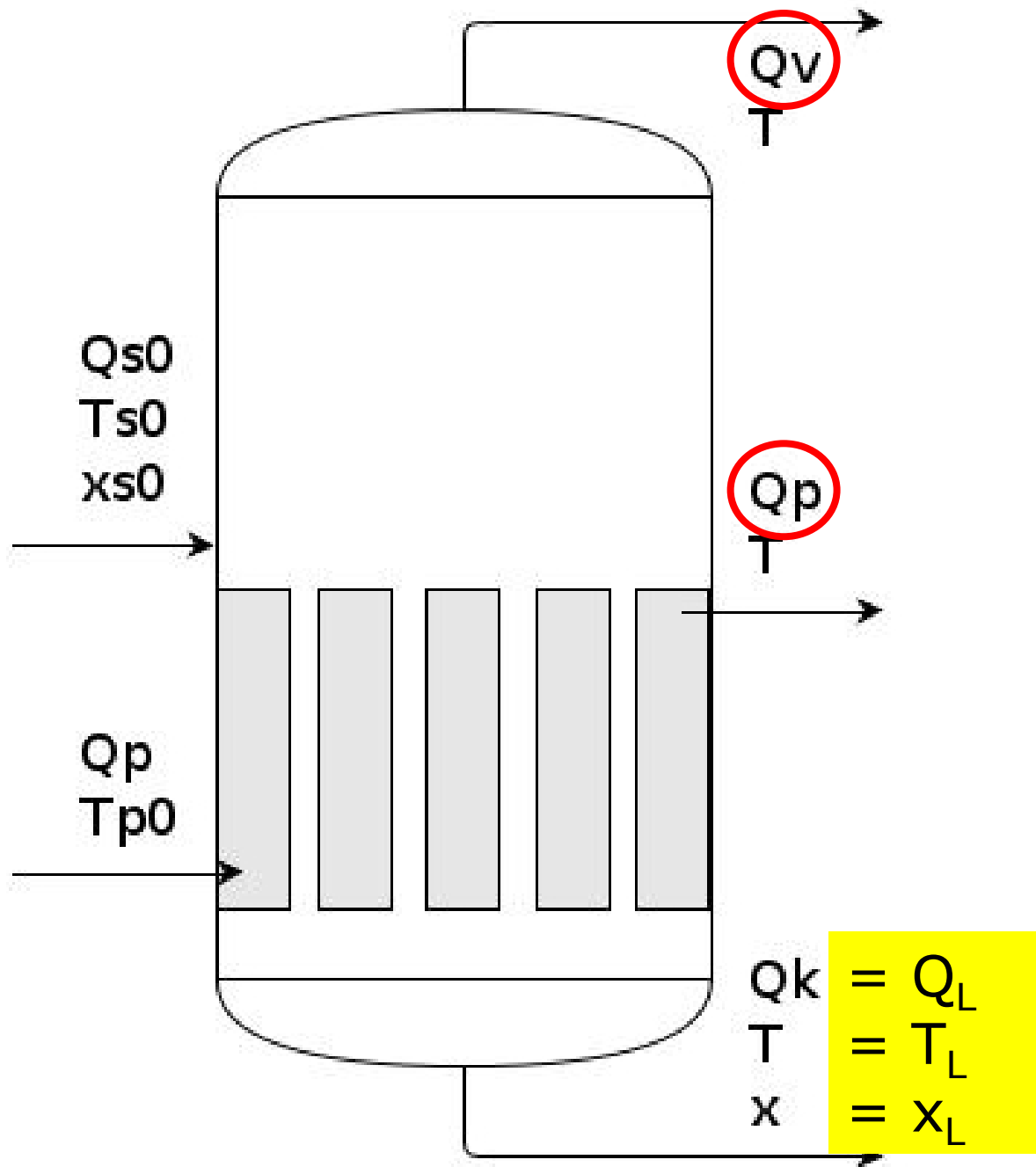
Bilance stacionarnih stanja

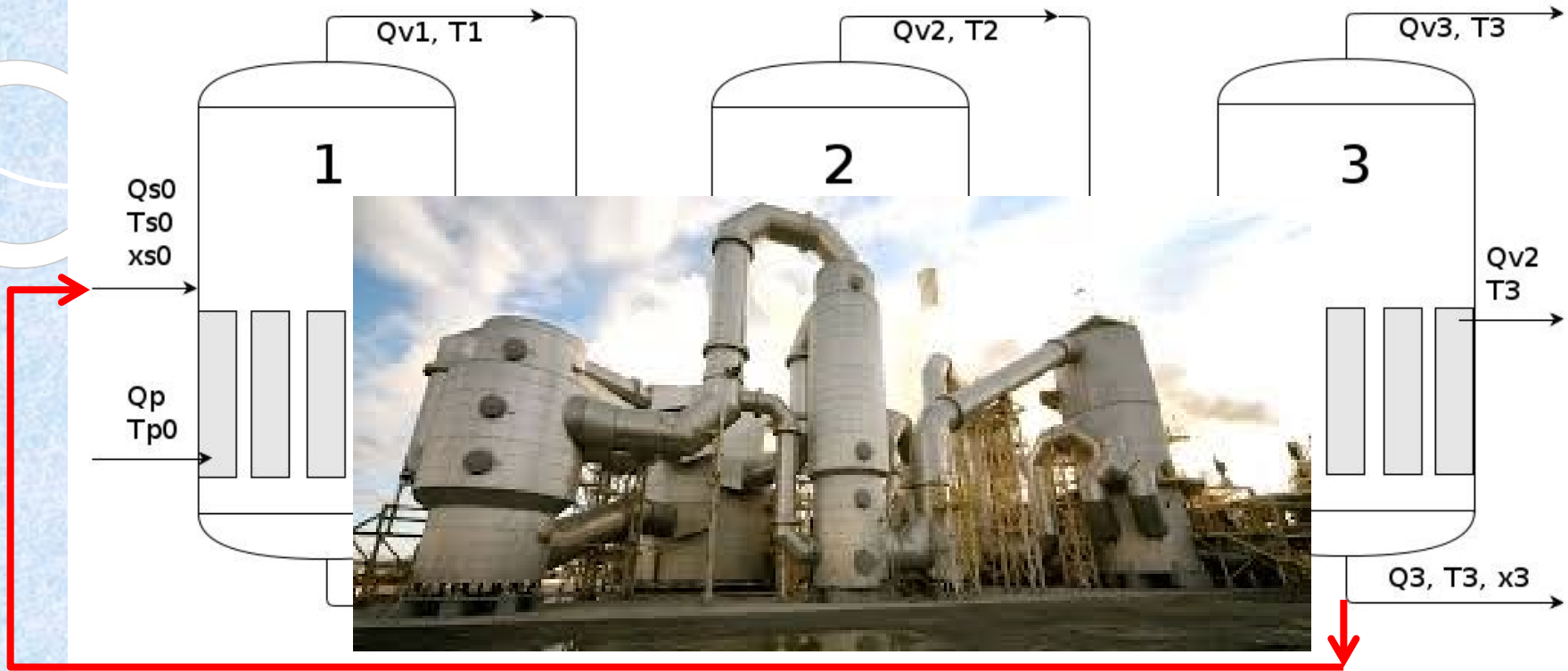
Pretpostavke:

- zanemarive su kemijske pretvorbe i njihov utjecaj na bilance mase i energije
- nema promjene akumulacije mase i energije, $\frac{d}{dt}(m, E) = 0$
- maseni udio suhe tvari (proizvoda) je sačuvan

Model se temelji na sljedećim bilancama:

1. ukupna bilanca mase
2. bilanca mase suhe tvari
3. ukupna bilanca energije
4. bilanca energije vodene pare





$$E_1 = \frac{Q_{v1}}{Q_p}$$

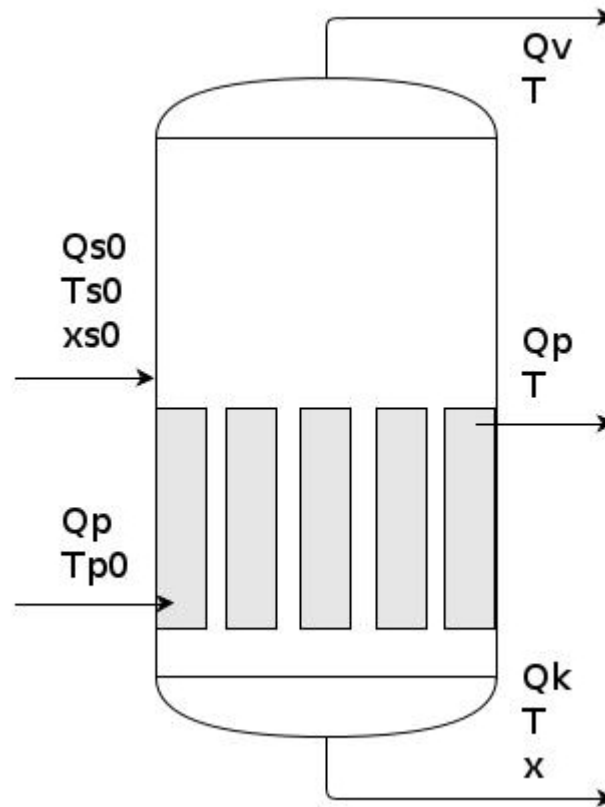
$$E_2 = \frac{Q_{v2}}{Q_{v1}}$$

$$E_3 = \frac{Q_{v3}}{Q_{v2}}$$

$$E = \frac{Q_{v3}}{Q_p}$$

ulazne veličine

izlazne veličine



ukupna bilanca mase: $Q =$ maseni protok

$$Q_{S0} + Q_P = Q_L + Q_V + Q_P$$

bilanca mase suhe tvari:

$$Q_{S0} \cdot x_0 = Q_L \cdot x(T)$$

ukupna bilanca energ

Energija koju
odnosi supara

Energija koju
odnosi koncentrat

Energija koju
odnosi para

$$Q_{S0} \cdot c_P(x_0) \cdot T_{S0} + Q_P \cdot i_P(T_{P0}) = Q_V \cdot i_V(T) + Q_L \cdot c_P(x) \cdot T + Q_P \cdot i_P(T)$$

Energija koju
donosi rijetki sok

Energija koju
donosi para

=

bilanca energije za vodenu paru:

$$Q_P \cdot [i_P(T_{P0}) - i_V(T)] = S \cdot h(x) \cdot (T_{P0} - T)$$

Specifična toplina

je

količina topline

koju jedinica količine tvari treba primiti

da bi joj se temperatura podigla za jedinicu temperature.

Litra vode nema jednaki c_p pri 10, 15 i 20 °C. Stoga se razlikuje i količina topline koju je vodi potrebno dovesti da bi joj se temperatura povećala s 10 na 11, s 15 na 16 ili s 20 na 21 °C.

Voda ima jedan od najvećih specifičnih toplinskih kapaciteta, čija vrijednost pri sobnoj temperaturi iznosi:

$$c_p(\text{H}_2\text{O}) \sim 4,2 \text{ kJ kg}^{-1} \text{ K}^{-1} = 4181,3 \text{ J g}^{-1}\text{K}^{-1}$$

$$c_p(\text{led}) \sim 2,1 \text{ kJ kg}^{-1} \text{ K}^{-1} = 2100 \text{ J g}^{-1}\text{K}^{-1}$$

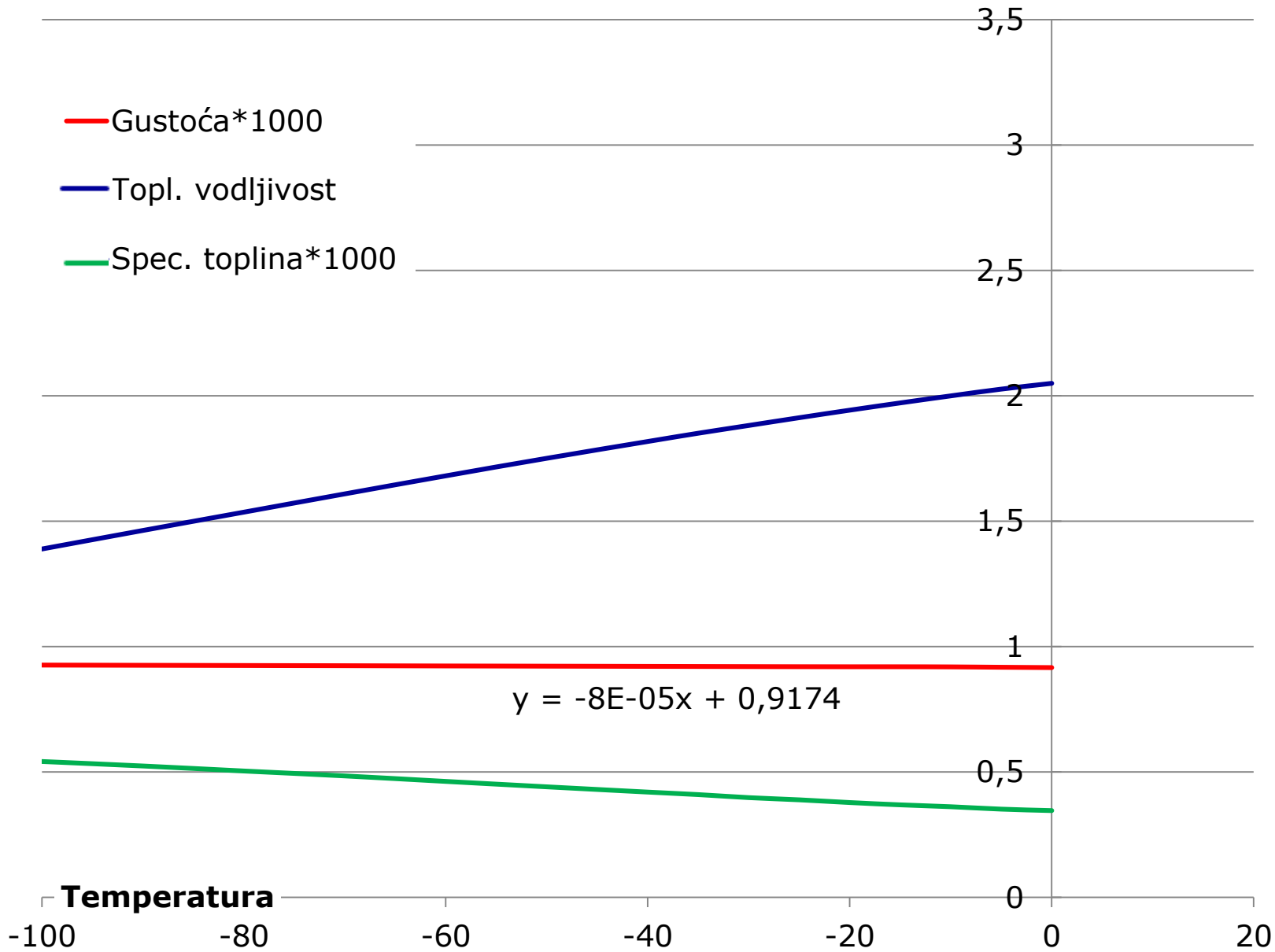
Entalpija je mjera za unutarnji sadržaj toplinske energije.

Toplinska vodljivost tvari jednaka je količini topline koju provodi kroz jedinicu površine, u jedinici vremena, pri standardnim uvjetima, a da se pritom vrijednost temperature smanji za jedan stupanj (1 K) na jedinici puta u smjeru strujanja topline. *(Jednaka količina topline potrebna je i za 1 °C.)*

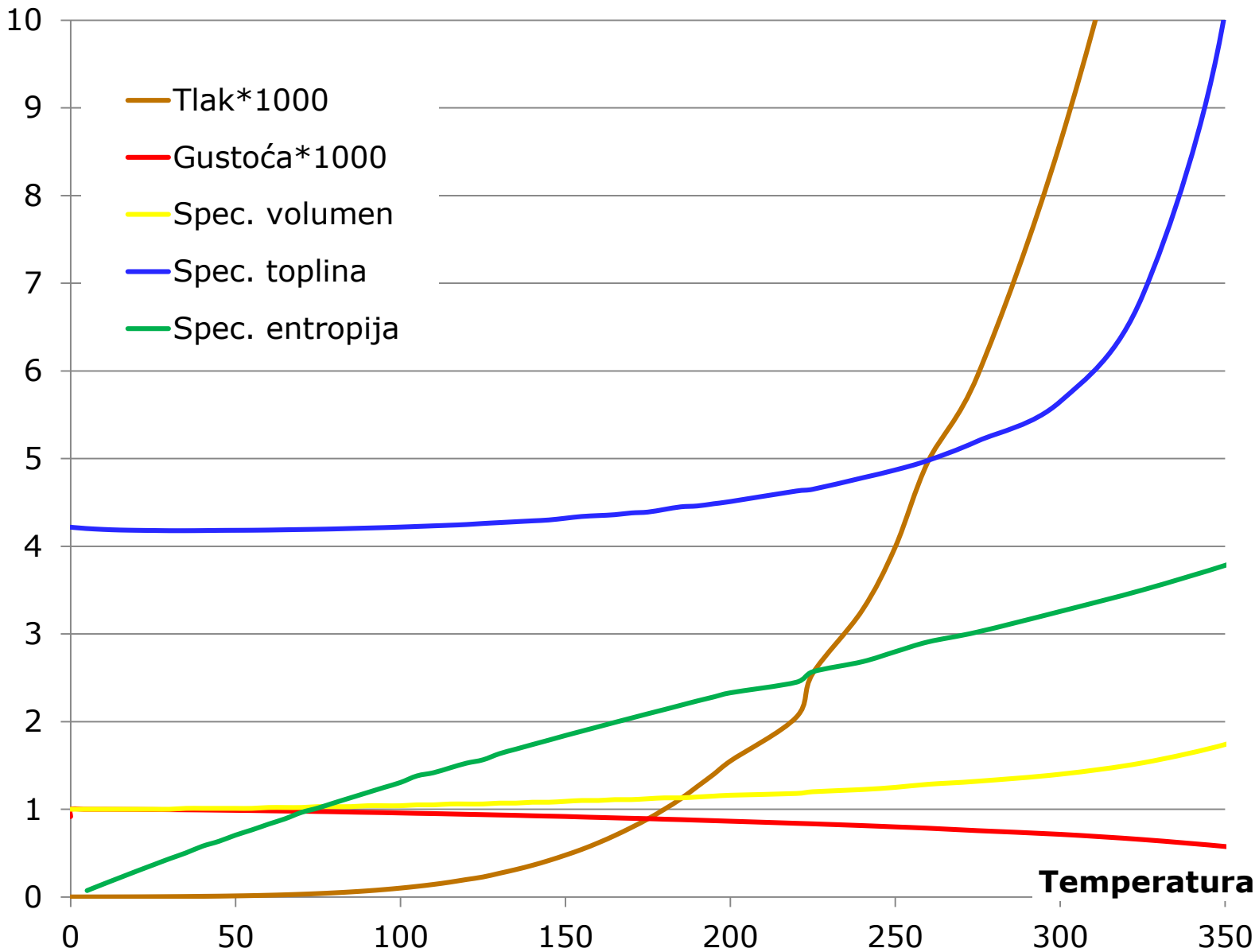
(20 °C)	Koeficijent toplinske vodljivosti <i>(W m⁻¹K⁻¹)</i>	Gustoća <i>(kg m⁻³)</i>	Volumetrijski toplinski kapacitet <i>(10⁶ J m⁻³ K⁻¹)</i>	Toplinska difuzivnost <i>(10⁻⁸ m² s⁻¹)</i>
brašno	0,45	593		
šećer	0,1-0,2	961		
etanol	0,171	789		7
ulje	0,138	918		7,38
mlijeko	0,53			
zrak	0,025	1,204	0,001	1938
voda	0,609	998	3,073	9
para	0,0184	0,6		
led*	2,18	917		

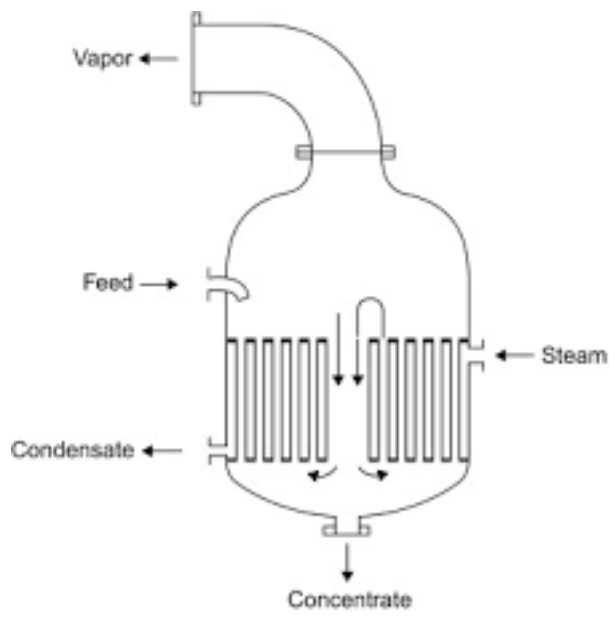
*vrijednost za led pri 0 °C

Toplinska svojstva leda

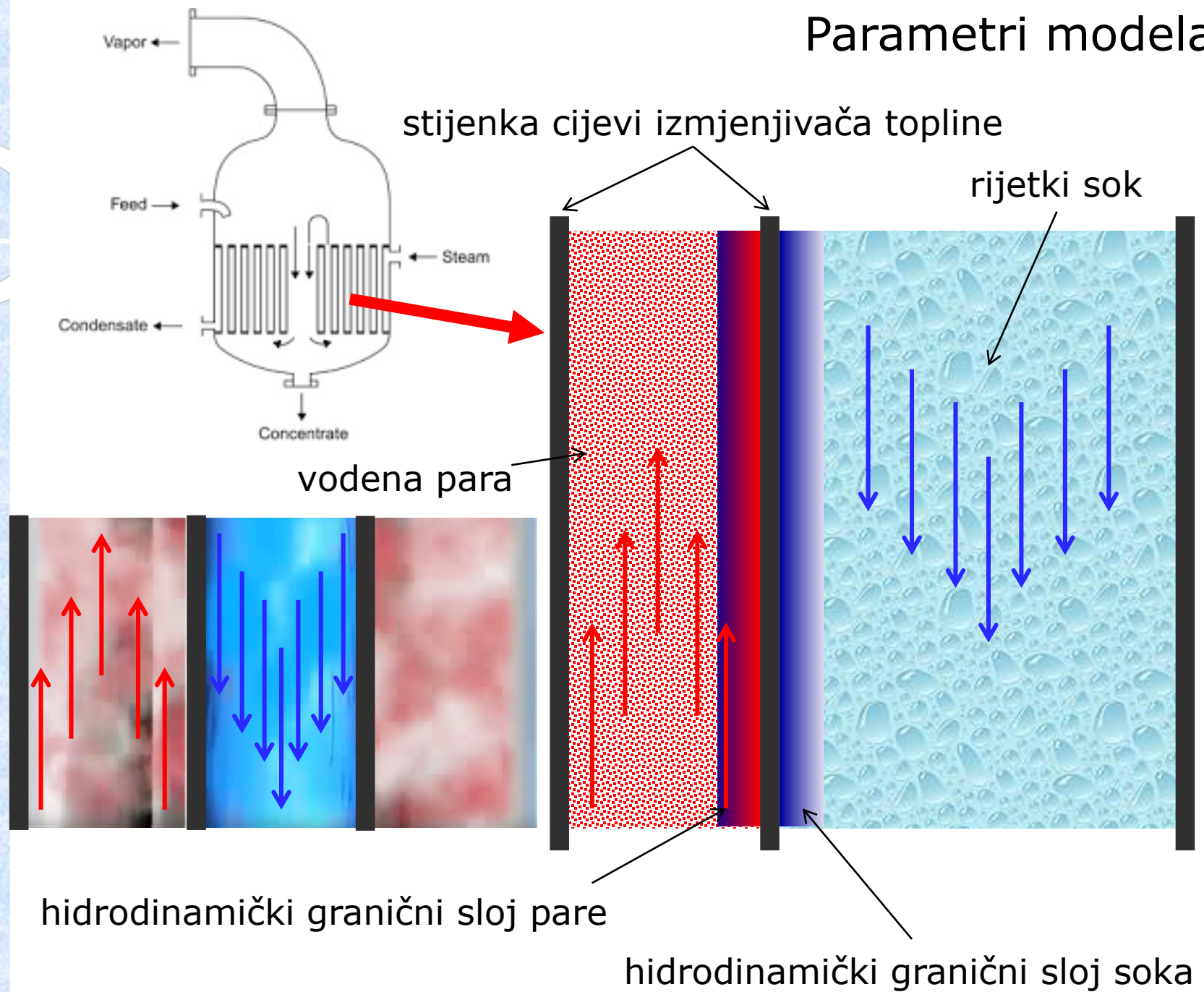


Toplinska svojstva vode



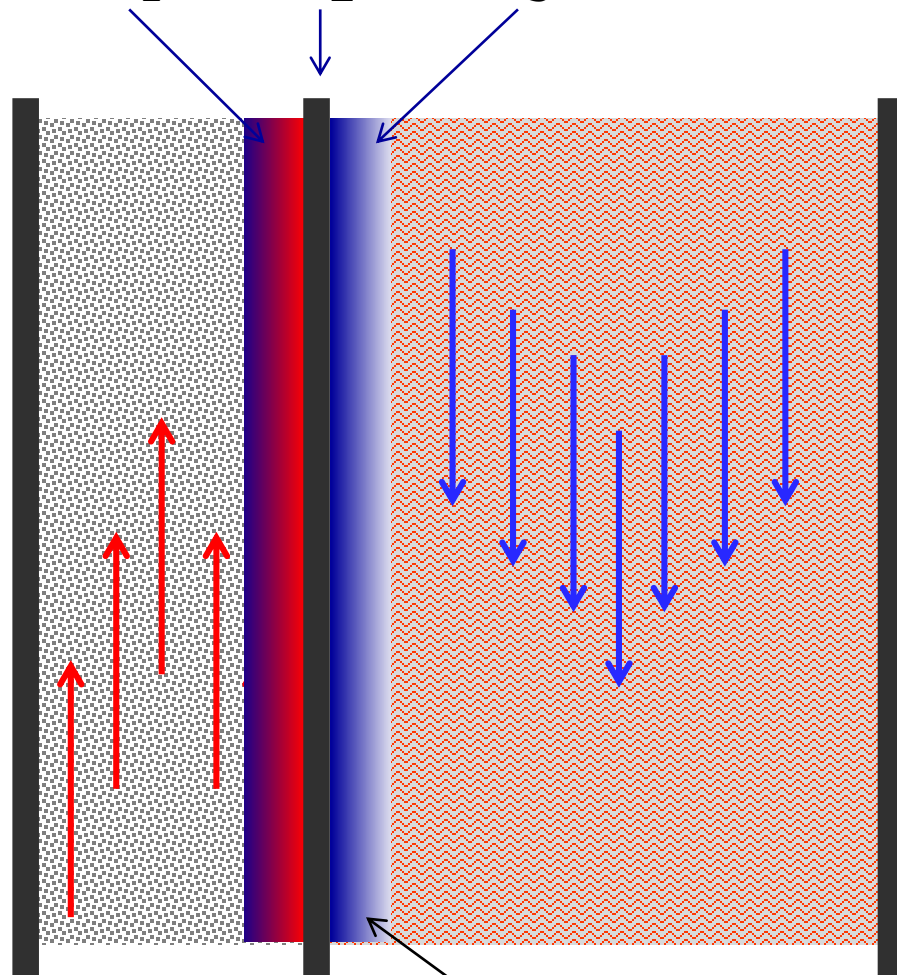


Parametri modela

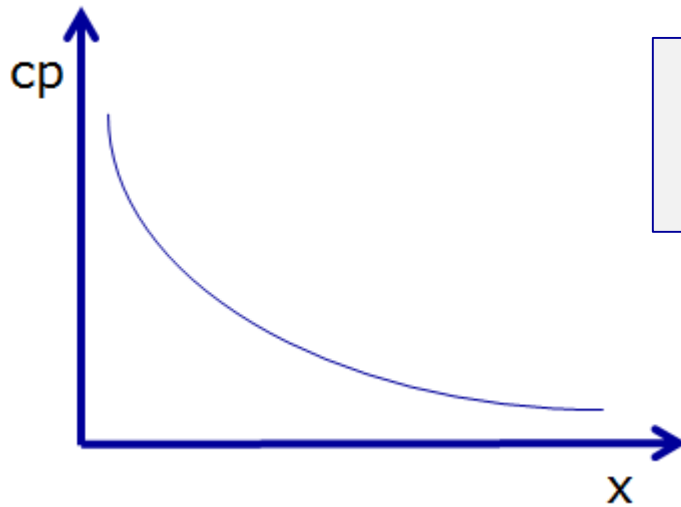


Otpori prijenosu topline

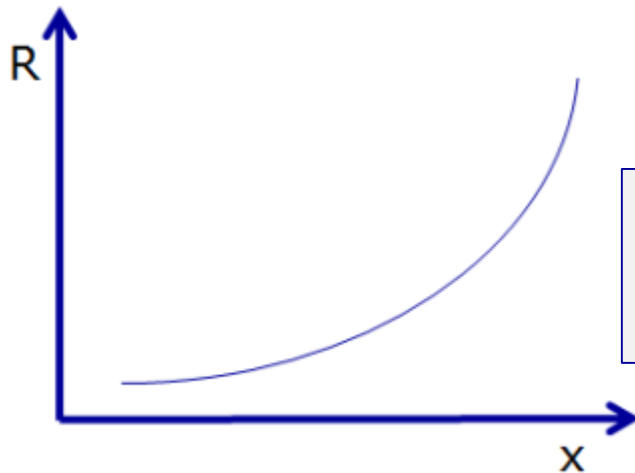
$$R = R_1 + R_2 + R_3$$



najvažniji parametar



specifični toplinski kapacitet materijala opada smanjenjem udjela vode i porastom udjela suhe tvari



otpor prijenosu topline kroz materijal raste smanjenjem udjela vode i porastom udjela suhe tvari

$$R = R_1 + R_2 + R_3$$

ukupna bilanca mase: $Q = \text{maseni protok}$

$$Q_{S0} + Q_P = Q_L + Q_V + Q_P$$

bilanca mase suhe tvari:

$$Q_{S0} \cdot x_0 = Q_L \cdot x(T)$$

ukupna bilanca energije:

$$Q_{S0} \cdot c_P(x) \cdot T_{S0} + Q_P \cdot i_P(T_{P0}) = Q_V \cdot i_P(T) + Q_L \cdot c_P(x) \cdot T + Q_P \cdot i_V(T)$$

bilanca energije za vodenu paru:

$$Q_P \cdot [i_P(T_{P0}) - i_V(T)] = S \cdot h(x) \cdot (T_{P0} - T)$$

$$Q_L = Q_{S0} \cdot \frac{x_0}{x}$$

$$Q_V = Q_{S0} \cdot \left(1 - \frac{x_0}{x}\right)$$

bilanca mase suhe tvari:

- četiri nelinearne bilance/iednadžbe pretvaramo u dvije

- veličine star $Q_{S0} \cdot x_0 = Q_L \cdot x(T)$

- želimo znati uilo suhe tvari i temperaturu koncentrata

- uvrštavanjem u bilance energije dobijemo sljedeće izraze:

$$f_1(x, T) = Q_{S0} \cdot \left(1 - \frac{x_0}{x}\right) \cdot i_P(T) + Q_{S0} \cdot \frac{x_0}{x} \cdot c_P(x) \cdot T \\ + Q_P \cdot i_V(T) - Q_{S0} \cdot c_P(x_0) \cdot T_{S0} - Q_P \cdot i_P(T_{P0})$$

$$f_2(x, T) = Q_P \cdot [i_P(T_{P0}) - i_V(T)] - h(x) \cdot S \cdot (T_{P0} - T)$$

- model je pojednostavljen smanjenjem broja jednažbi sa četiri (bilance/jednažbe) na dvije (nelinearne jednažbe)
- nelinearne jednažbe rješavamo Newton-Raphson-ovom metodom

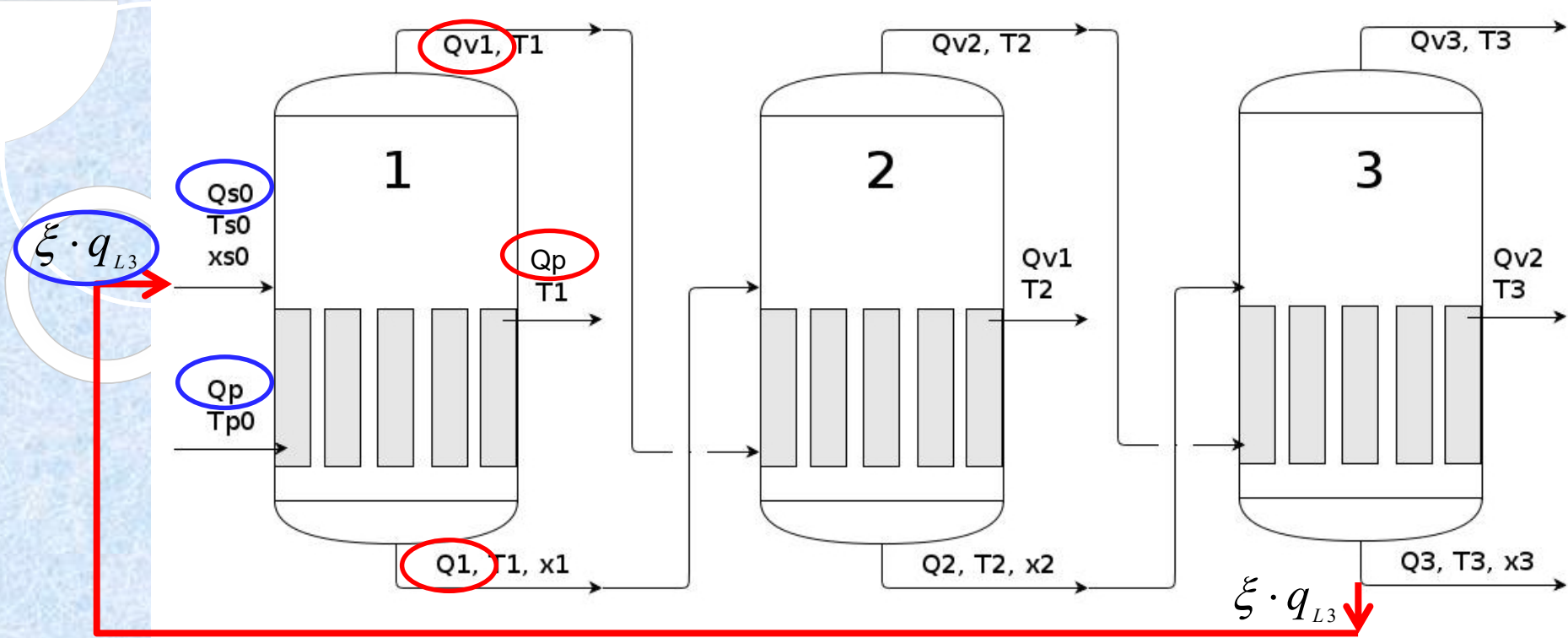
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$f_1(x, T) = Q_{S0} \cdot \left(1 - \frac{x_0}{x}\right) \cdot i_P(T) + Q_{S0} \cdot \frac{x_0}{x} \cdot c_P(x) \cdot T \\ + Q_P \cdot i_V(T) - Q_{S0} \cdot c_P(x_0) \cdot T_{S0} - Q_P \cdot i_P(T_{P0})$$

$$f_2(x, T) = Q_P \cdot [i_P(T_{P0}) - i_V(T)] - h(x) \cdot S \cdot (T_{P0} - T)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \frac{f(\mathbf{x}_k)}{f'(\mathbf{x}_k)} = \mathbf{x}_k - f'(\mathbf{x}_k)^{-1} \cdot f(\mathbf{x}_k)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ T_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_k \\ T_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial f_1}{\partial T} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial f_2}{\partial T} \end{pmatrix}_{(\mathbf{x}_k, T_k)}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}, T) \\ f_2(\mathbf{x}, T) \end{pmatrix}_{(\mathbf{x}_k, T_k)}$$



ukupne bilance mase

$$1) \quad \underline{q_{s0}} + \underline{\xi \cdot q_{L3}} + \underline{q_P} = \underline{q_{L1}} + \underline{q_{V1}} + \underline{q_P}$$

konačni udio suhe tvari

$$2) \quad q_{L1} + q_{V1} = q_{L2} + q_{V2} + q_{V1}$$

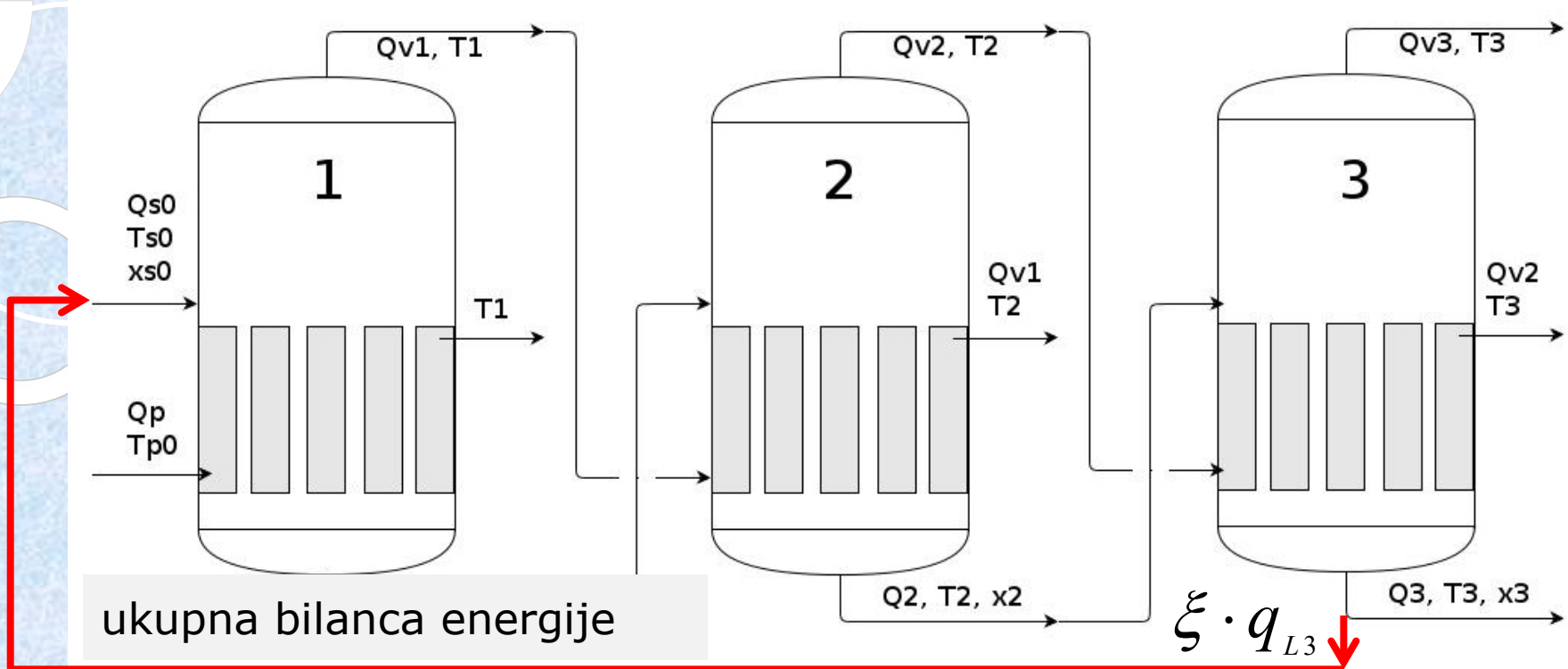
$$3) \quad q_{L2} + q_{V2} = q_{L3} + q_{V3} + q_{V2}$$

bilance mase suhe tvari

$$1) \quad q_{s0} \cdot x_{s0} + \xi \cdot q_{L3} = q_{L1} \cdot x_1$$

$$2) \quad q_{L1} \cdot x_1 = q_{L2} \cdot x_2$$

$$3) \quad q_{L2} \cdot x_2 = q_{L3} \cdot x_3$$



$$1) \quad M \cdot c_p \cdot T + \xi \cdot q_{L3} \cdot c_P(x_3) \cdot T_3 + M \cdot i_p \cdot T$$

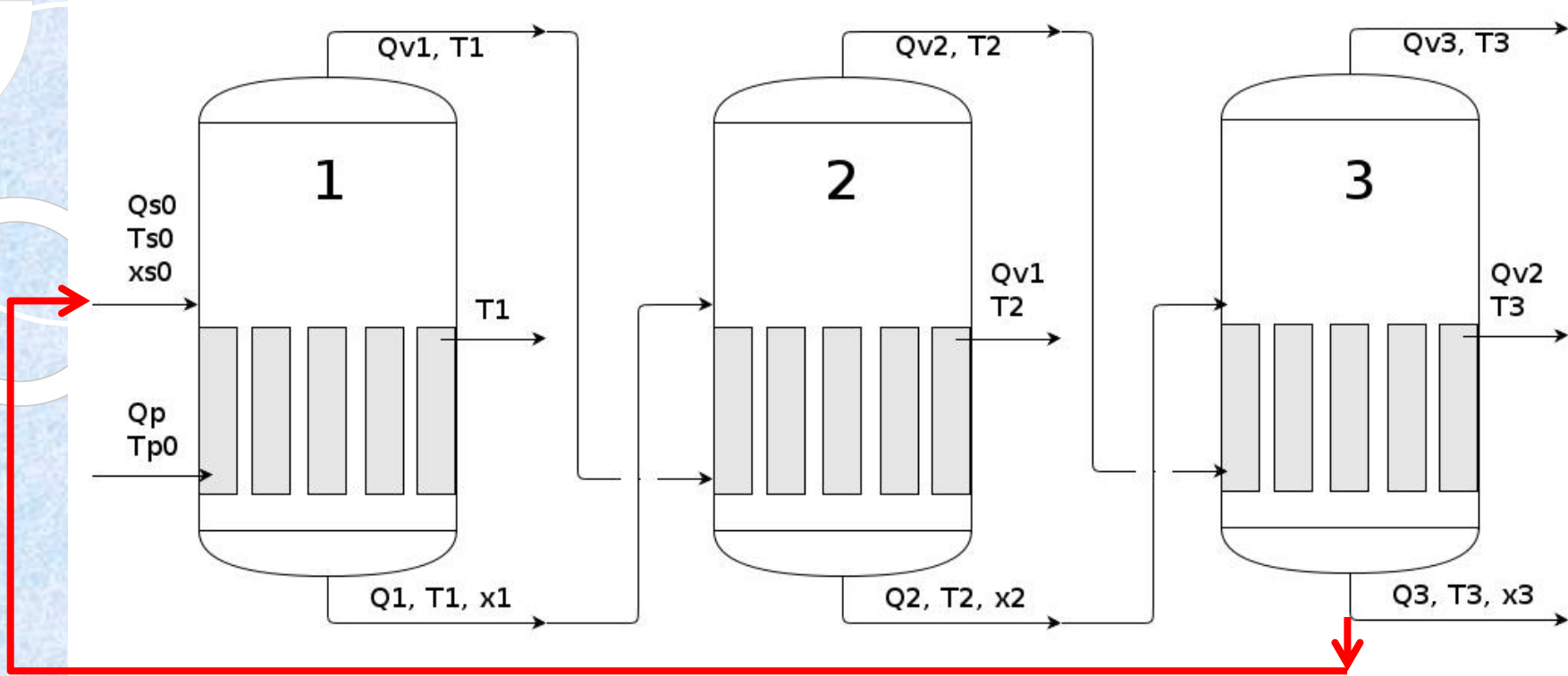
$$q_{L1} \cdot c_P(x_1) \cdot T_1 + q_{V1} \cdot i_P(T_1) + q_P \cdot i_V(T_1)$$

$$2) \quad q_{L1} \cdot c_P(x_1) \cdot T_1 + q_{V1} \cdot i_P(T_1) =$$

$$q_{L2} \cdot c_P(x_2) \cdot T_2 + q_{V2} \cdot i_P(T_2) + q_{V1} \cdot i_V(T_2)$$

$$3) \quad q_{L2} \cdot c_P(x_2) \cdot T_2 + q_{V2} \cdot i_P(T_2) =$$

$$q_{L3} \cdot c_P(x_3) \cdot T_3 + q_{V3} \cdot i_P(T_3) + q_{V2} \cdot i_V(T_3)$$



bilance energije pare

$$1) \quad q_P \cdot [i_P(T_{P0}) - i_V(T_1)] = S \cdot h(x_1) \cdot (T_{P0} - T_1)$$

$$2) \quad q_{V1} \cdot [i_P(T_1) - i_V(T_2)] = S \cdot h(x_2) \cdot (T_1 - T_2)$$

$$3) \quad q_{V2} \cdot [i_P(T_2) - i_V(T_3)] = S \cdot h(x_3) \cdot (T_2 - T_3)$$

Korišteni su slijedeći linearni regresijski modeli za

- koeficijent prijenosa topline: $h(x) = h_0 - h_1 \cdot x$

- specifičnu toplinu: $cp(x) = cp_s \cdot x + cp_l \cdot (1 - x)$

$$cp_s = cp_{(solid)} = cp_{(suhe\ tvari\ u\ soku)}$$

$$cp_l = cp_{(liquid)} = cp_{(vode\ u\ soku)}$$

- entalpije zasićene pare: $i_p(x) = i_{p0} + i_{p1} \cdot T$

- entalpije otparene vode: $i_v(T) = i_{v0} + i_{v1} \cdot T$

Svrha modeliranja procesa uparavanja

1) optimiranje djelotvornosti uparavanja

$$\max (E)$$

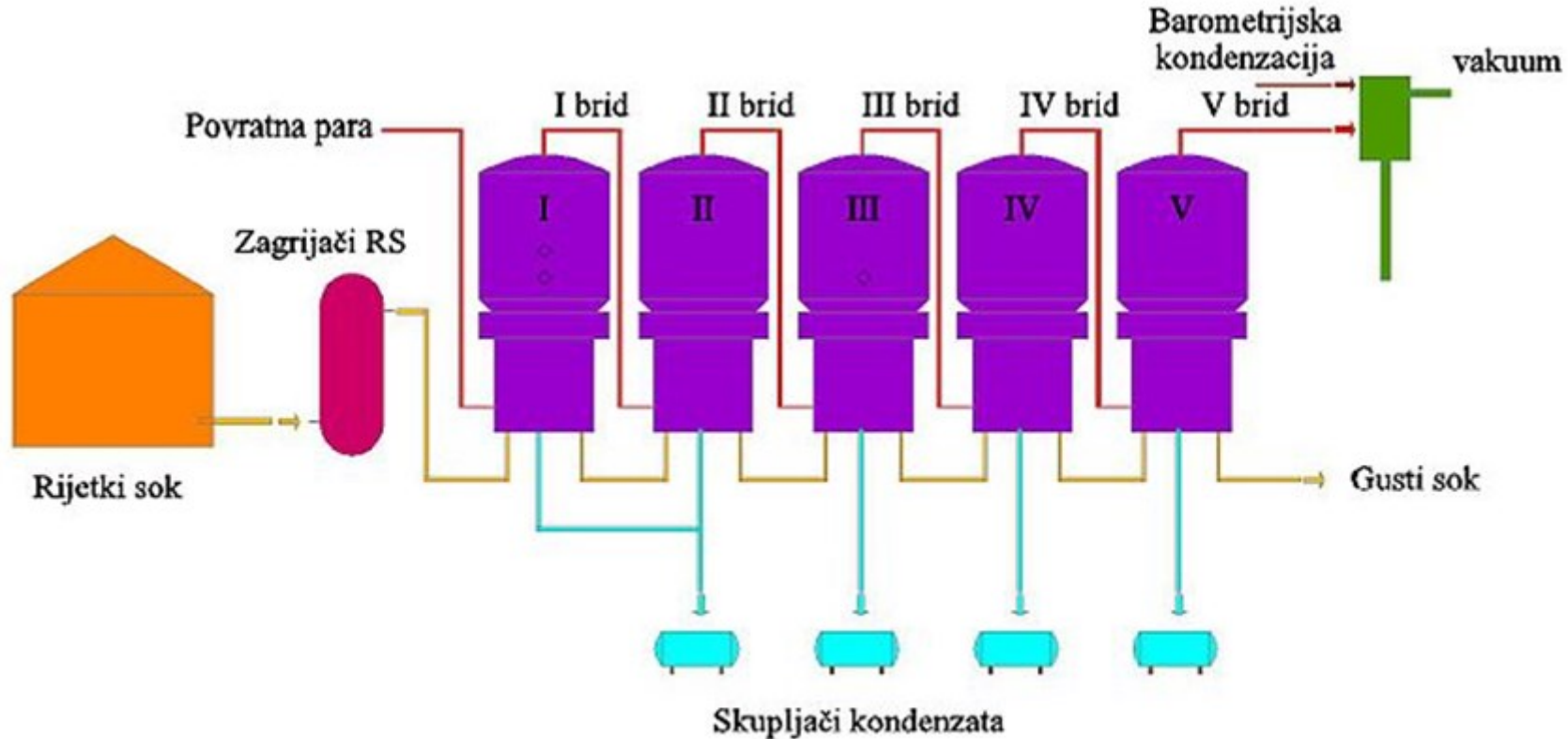
2) optimiranje kakvoće proizvoda

(npr. indeks kakvoće = koncentracija vitamina u koncentratu)

3) adaptivno upravljanje

za promjenljivi sastav ulazne sirovine (x_0)

Uparavanje rijetkog soka u proizvodnji šećera



PETEROČLANA UPARNA STANICA

Q_{s0} (kg h ⁻¹)=	15000		
T_{s0} (°C)=	20		
x_{s0} (kg kg ⁻¹)=	0,10		
Q_p (kg h ⁻¹)=	13000	$\approx Q_v$ (kg h ⁻¹)	11238,3971
T_{p0} (°C)=	125	$\approx T_v$ (°C)	97,52
		$\approx Q_p$ (kg h ⁻¹)	13000
		$\approx T_p$ (°C)	97,52
		$\approx Q_k$ (kg h ⁻¹)	3761,6029
		$\approx T_k$ (°C)	97,52
		$\approx x_k$ (kg kg ⁻¹)	0,3988
		$T_v = T_p = T_k$ (°C)	
UKUPNA BILANCA MASE			
Ulazni maseni protok soka naranče (kg h ⁻¹)=			15000
Izlazni maseni protok koncentrata soka naranče (kg h ⁻¹)=			3761,6029
Izlazni maseni protok vode otparene iz soka naranče (kg h ⁻¹)=			11238,3971
BILANCA MASE SUHE TVARI			
Maseni udio suhe tvari na ulazu u uparivač (kg kg ⁻¹)=			0,1
Maseni udio suhe tvari na izlazu iz uparivača (kg kg ⁻¹)=			0,3987662
UKUPNA BILANCA ENERGIJE			
Ulazni tok entalpije soka naranče (MJ h ⁻¹)=			1175,0850
Ulazni tok entalpije zasićene vodene pare (MJ h ⁻¹)=			35330,6200
Izlazni tok entalpije para soka naranče (MJ h ⁻¹)=			30053,9100
Izlazni tok entalpije ukapljene (zasićene) vodene pare (MJ h ⁻¹)=			5310,3149
Izlazni tok entalpije koncentrata soka naranče (MJ h ⁻¹)=			1141,4801
Temperatura uparavanja (°C)=			97,52322
Efikasnost uparavanja Q_v/Q_p =			0,8644921

MODELIRANJE KONCENTRIRANJA RIJETKOG SOKA UPARAVANJEM - jednostruki uparivač

31.12.2022 17:53

simulacija

	I	II	II	IV	V	VI
Qso(kg/h) [15000-20000]	15000	20000	20000	20000	20000	15000
Tso (°C) [15 -20]	15	15	20	20	20	20
x (kg/kg) [0,09 -0,12]	0,10	0,10	0,10	0,1	0,10	0,10
Qp (kg/h) [12000-13000]	12000	12000	12000	13000	13000	13000
Tp (°C) [115-120]	120	120	120	120	125	125

UKUPNA BILANCA MASE

Sok Qso (kg/h)	15000,00	20000,00	20000,00	20000,00	20000,00	15000,00
Supara Qv (kg/h)	10074,80	9264,00	9439,64	10559,49	10361,21	11238,40
Qk (kg/h)	4925,20	10736,00	10560,36	9440,51	9638,79	3761,60

BILANCA SUHE TVARI

xo (kg/kg)	0,1000	0,1000	0,1000	0,1000	0,1000	0,1000
x (kg/kg)	0,3046	0,1863	0,1894	0,2119	0,2075	0,3988

UKUPNA BILANCA ENERGIJE

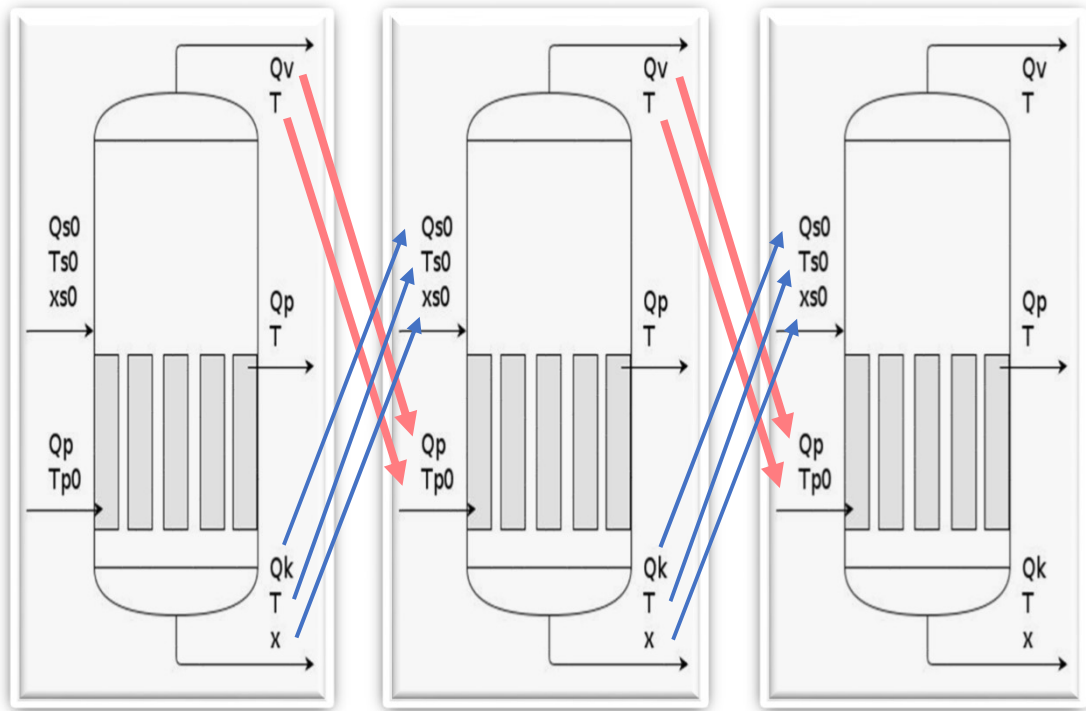
1. Sok (MJ/h)	881,31375	1175,09	1566,78	1566,780	1566,78	1175,09
2. Para_ulaz (MJ/h)	32517,84	32517,84	32517,84	35227,660	35330,62	35330,62
3. Supara (MJ/h)	26930,36	24796,36	25265,68	28225,212	27780,92	30053,91
4. Para_izlaz (MJ/h)	4864,54	4978,59	4975,89	5267,460	5551,82	5310,31
5. Koncentrat (MJ/h)	1604,26	3917,97	3843,05	3301,769	3564,65	1141,48
Tk (°C)	96,78	99,05	99,00	96,74	101,96	97,52
(Qv/Qp)	0,840	0,772	0,787	0,812	0,797	0,864

PROVJERA BILANCI TOPLINE

(1+2) - (3+4+5) = 0	DA	DA	DA	DA	DA	DA
----------------------------	----	----	----	----	----	----

Pri povećanju protoka zasićene vodene pare efikasnost se povećava jer se otparava više supare nego što se dovodi pare.

Najskuplja opcija je povećanje protoka pare. Najbolje opcije su kvalitetna sirovina i predgrijavanje soka.



MODELIRANJE KONCENTRIRANJA RIJETKOG SOKA UPRAVANJEM - trostruki uparivač

	1. simulacija			2. simulacija			
	I	II	II	I	II	II	
Qso(kg/h) [15000-20000]	15000	13586,56	12116,77	Qso(kg/h) [15000-20000]	20000	19456	18883
Tso (°C) [5 -25]	15	113,5888	111,3009	Tso (°C) [5 -25]	15	113,63	112,76
x (kg/kg) [0,05 -0,12]	0,1	0,110403	0,123795	x (kg/kg) [0,05 -0,12]	0,10	0,10	0,11
Qp (kg/h) [4000-6200]	4000	1413,436	1469,79	Qp (kg/h) [4000-6200]	4000	544	573,62
Tp (°C) [115-125]	120	113,5888	111,3009	Tp (°C) [115-125]	120	114	112,76
UKUPNA BILANCA MASE				UKUPNA BILANCA MASE			
Sok Qso (kg/h)	15000	13586,56	12116,77	Qso (kg/h)	20000,00	19456,25	18882,63
Supara Qv (kg/h)	1413,436	1469,79	1522,644	Qv (kg/h)	543,75	573,62	604,24
Qk (kg/h)	13586,56	12116,77	10594,13	Qk (kg/h)	19456,25	18882,63	18278,39
BILANCA SUHE TVARI				BILANCA SUHE TVARI			
xo (kg/kg)	0,1	0,110403	0,123795	xo (kg/kg)	0,1000	0,1028	0,1059
x (kg/kg)	0,110403	0,123795	0,141588	x (kg/kg)	0,1028	0,1059	0,1094
UKUPNA BILANCA ENERGIJE				UKUPNA BILANCA ENERGIJE			
Sok (MJ/h)	881,3138	6001,68	5195,932	Sok (MJ/h)	1175,09	8642,66	8306,00
Para_ulaz (MJ/h)	10839,28	3815,802	3962,613	Para_ulaz (MJ/h)	10839,28	1467,98	1547,82
Supara (MJ/h)	3815,802	3962,613	4099,278	Supara (MJ/h)	1467,98	1547,82	1629,58
Para_izlaz (MJ/h)	1903,112	658,9368	670,3192	Para_izlaz (MJ/h)	1903,73	256,82	268,72
Koncentrat (MJ/h)	6001,68	5195,932	4388,948	Koncentrat (MJ/h)	8642,66	8306,00	7955,52
Tk (°C)	113,5888	111,3009	108,8824	Tk (°C)	113,63	112,76	111,84
(Qv/Qp)	0,353	1,040	1,036	(Qv/Qp)	0,136	1,055	1,053
(Q3/Qp)			1,101	(Q3/Qp)			0,430

Najskuplja opcija je povećanje protoka pare

Najbolja opcija je kvalitetna sirovina

Moguće je poboljšanje predgrijavanjem soka

MODELIRANJE KONCENTRIRANJA RIJETKOG SOKA UPRAVANJEM - trostruki uparivač

	3. simulacija			4. simulacija			
	I	II	II	I	II	II	
Qso(kg/h) [15000-20000]	20000	19279,94	18520,49	Qso(kg/h) [15000-20000]	20000	19180,59	18316,26
Tso (°C) [5 -25]	20	113,6211	112,4718	Tso (°C) [5 -25]	20	113,4109	112,0568
x (kg/kg) [0,05 -0,12]	0,1	0,103735	0,107988	x (kg/kg) [0,05 -0,12]	0,14	0,145981	0,15287
Qp (kg/h) [4000-6200]	4000	720,0617	759,4443	Qp (kg/h) [4000-6200]	4000	819,4144	864,3305
Tp (°C) [115-125]	120	113,6211	112,4718	Tp (°C) [115-125]	120	113,4109	112,0568
UKUPNA BILANCA MASE				UKUPNA BILANCA MASE			
Qso (kg/h)	20000,00	19279,94	18520,49	Qso (kg/h)	20000,00	19180,59	18316,26
Qv (kg/h)	720,06	759,44	799,43	Qv (kg/h)	819,41	864,33	909,72
Qk (kg/h)	19279,94	18520,49	17721,06	Qk (kg/h)	19180,59	18316,26	17406,54
BILANCA SUHE TVARI				BILANCA SUHE TVARI			
xo (kg/kg)	0,1000	0,1037	0,1080	xo (kg/kg)	0,1400	0,1460	0,1529
x (kg/kg)	0,1037	0,1080	0,1129	x (kg/kg)	0,1460	0,1529	0,1609
UKUPNA BILANCA ENERGIJE				UKUPNA BILANCA ENERGIJE			
Sok (MJ/h)	1566,78	8558,45	8114,29	Sok (MJ/h)	1523,65	8250,89	7746,89
Para_ulaz (MJ/h)	10839,28	1943,96	2048,90	Para_ulaz (MJ/h)	10839,28	2211,91	2331,31
Supara (MJ/h)	1943,96	2048,90	2155,24	Supara (MJ/h)	2211,91	2331,31	2451,66
Para_izlaz (MJ/h)	1903,65	339,22	353,90	Para_izlaz (MJ/h)	1900,13	384,60	400,47
Koncentrat (MJ/h)	8558,45	8114,29	7654,04	Koncentrat (MJ/h)	8250,89	7746,89	7226,07
Tk (°C)	113,62	112,47	111,25	Tk (°C)	113,41	112,06	110,62
(Qv/Qp)	0,180	1,055	1,053	(Qv/Qp)	0,205	1,055	1,053
(Q3/Qp)			0,570	(Q3/Qp)			0,648

MODELIRANJE KONCENTRIRANJA RIJETKOG SOKA UPRAVANJEM - trostruki uparivač

	5. simulacija			6. simulacija			
	I	II	II	I	II	II	
Qso(kg/h) [15000-20000]	20000	16807,5	13446,91	Qso(kg/h) [15000-20000]	20000	16999,89	13841,46
Tso (°C) [5 -25]	20	109,5471	103,9666	Tso (°C) [5 -25]	20	114,6244	109,4396
x (kg/kg) [0,05 -0,12]	0,14	0,166592	0,208226	x (kg/kg) [0,05 -0,12]	0,14	0,164707	0,202291
Qp (kg/h) [4000-6200]	6200	3192,496	3360,592	Qp (kg/h) [4000-6200]	6200	3000,113	3158,426
Tp (°C) [115-125]	120	109,5471	103,9666	Tp (°C) [115-125]	125	114,6244	109,4396
UKUPNA BILANCA MASE				UKUPNA BILANCA MASE			
Qso (kg/h)	20000	16807,5	13446,91	Qso (kg/h)	20000	16999,89	13841,46
Qv (kg/h)	3192,496	3360,592	3510,516	Qv (kg/h)	3000,113	3158,426	3300,76
Qk (kg/h)	16807,5	13446,91	9936,396	Qk (kg/h)	16999,89	13841,46	10540,7
BILANCA SUHE TVARI				BILANCA SUHE TVARI			
xo (kg/kg)	0,14	0,166592	0,208226	xo (kg/kg)	0,14	0,164707	0,202291
x (kg/kg)	0,166592	0,208226	0,281792	x (kg/kg)	0,164707	0,202291	0,265637
UKUPNA BILANCA ENERGIJE				UKUPNA BILANCA ENERGIJE			
Sok (MJ/h)	1523,652	6881,443	5068,173	Sok (MJ/h)	1523,652	7292,704	5515,743
Para_ulaz (MJ/h)	16800,88	8598,23	9021,25	Para_ulaz (MJ/h)	16849,99	8104,22	8505,932
Supara (MJ/h)	8598,23	9021,25	9388,709	Supara (MJ/h)	8104,22	8505,932	8858,963
Para_izlaz (MJ/h)	2844,863	1390,25	1374,849	Para_izlaz (MJ/h)	2976,717	1375,248	1371,183
Koncentrat (MJ/h)	6881,443	5068,173	3325,864	Koncentrat (MJ/h)	7292,704	5515,743	3791,529
Tk (°C)	109,5471	103,9666	97,67209	Tk (°C)	114,6244	109,4396	103,6468
(Qv/Qp)	0,515	1,053	1,045	(Qv/Qp)	0,484	1,053	1,045
(Q3/Qp)			1,623	(Q3/Qp)			1,526

ZADANI SU SLIJEDEĆI PODACI ZA JEDNOSTRUKI UPARIVAČ

MASENI PROTOK SOKA NARANČE NA ULAZU U UPARIVAČ	Qso(kg/h) [15000-20000]	15000
TEMPERATURA SOKA NARANČE NA ULAZU U UPARIVAČ	Tso (°C) [15 -20]	20
MASENI UDIO SUHE TVARI U ULAZKOM SOKU NARANČE	x (kg/kg) [0,09 -0,12]	0,10
MASENI PROTOK ZASIĆENE VODENE PARE	Qp (kg/h) [12000-13000]	13000
TEMPERATURA ZASIĆENE VODENE PARE NA ULAZU	Tp (°C) [120-125]	125

UKUPNA BILANCA MASE

ULAZNI MASENI PROTOK SOKA NARANČE	Qso (kg/h)	15000
IZLAZNI MASENI PROTOK PARA NARANČINOG SOKA	Qv (kg/h)	11238,3971
IZLAZNI MASENI PROTOK KONCENTRATA SOKA	Qk (kg/h)	3761,6029

BILANCA SUHE TVARI

MASENI UDIO SUHE TVARI NA ULAZU U UPARIVAČ	xo (kg/kg)	0,10
MASENI UDIO SUHE TVARI NA IZLAZU IZ UPARIVAČA	x (kg/kg)	0,398766

UKUPNA BILANCA ENERGIJE

ULAZNI TOK ENTALPIJE SOKA NARANČE	(MJ/h)	1175,0850
ULAZNI TOK ENTALPIJE ZASIĆENE VODENE PARE	(MJ/h)	35330,6200
IZLAZNI TOK ENTALPIJE PARA SOKA NARANČE	(MJ/h)	30053,9100
IZLAZNI TOK ENTALPIJE UKAPLJENE VODENE PARE	(MJ/h)	5310,3149
IZLAZNI TOK ENTALPIJE KONCENTRATA SOKA	(MJ/h)	1141,4801
TEMPERATURA UPARAVANJA	Tk (°C)	97,523220
EFIKASNOST UPARAVANJA (Qv/Qp)		0,864492

PROVJERA BILANCE TOPLINE

		SUMA toplina ulaz	SUMA entalpija izlaz	
Qso	Sok	1175,0850	30053,9100 Supara	Qv
Qpo	Para	35330,6200	5310,3149 Kondenzat pare	Qp
			1141,48 Koncentrat soka	Qk
		RAZLIKA		
		36505,7050	0,0000	36505,7050



3. Modeli dinamičkih stanja sustava

Model smrzavanja namirnica

Metoda za rješavanje diferencijalnih jednažbi
(Eulerova i Runge-Kutta)

Model sterilizacije namirnica

Model upravljanja biokemijskim reaktorom

- Promjene mjernih veličina u tehnološkim procesima najčešće su opisane diferencijalnim jednačbama:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \frac{dy}{dr} = f(r, y)$$

- Većina tehnoloških procesa određena je istovremenim promjenama više nezavisnih veličina
(primjer: promjenom temperature namirnice mijenjaju se i viskozitet, gustoća, volumen, udio vitamina i dr.)
- Zato ove promjene ne možemo opisati običnim diferencijalnim jednačbama (ODJ) nego ih moramo opisivati parcijalnim diferencijalnim jednačbama (PDJ) [u istom trenutku mijenjaju se vrijednosti nekoliko veličina]

- Nije nam uvijek potrebno potpuno točno rješenje neke funkcije
- Stoga parcijalne diferencijalne jednačbe (PDJ) pojednostavljujemo različitim **aproksimacijama** zadane funkcije
- Tako PDJ postaju obične diferencijalne jednačbe (ODJ), a ponekad i obične algebarske jednačbe (OAJ)

PDJ → ODJ → OAJ

- **Aproksimacijama** ne možemo izračunati potpuno točne vrijednosti rješenja funkcije nego tek **približne vrijednosti**
- Za izračun točnih ili približnih vrijednosti funkcije najčešće moramo koristiti **numeričke metode**
- Izbor numeričke metode zavisi od vrste jednačbe kojom su opisane bilance ii druge zavisnosti izlaznih veličina o ulaznim veličinama

- Obične i parcijalne diferencijalne jednačbe (ODJ i PDJ) koje se pojavljuju u tehnološkim procesima često nisu rješive analitički tj. egzaktno (izračunata rješenja ne možemo potvrditi mjerenjem)
- Zato je za izračunavanje rješenja potrebno koristiti numeričke metode
(Primjer: za izračunavanje temperature namirnice tijekom sterilizacije, potrebno je riješiti diferencijalnu jednačbu)
- Najpoznatija je Eulerova metoda *(Leonhard Euler, 1768.)*
- Euler-ova metoda je tzv. Runge–Kutta metoda prvog reda (pogreška metode je reda e^1 pa je to metoda prvog reda)
 - Vidi skripta: Numeričke metode

- Postoje i drugi oblici ove metode kao i njena poboljšanja (npr.: korigirana Eulerova metoda)
- Ideja Euler-ove metode je da se „visina“ iduće ordinate iz prethodne konstruira po tangenti u toj prethodnoj točki

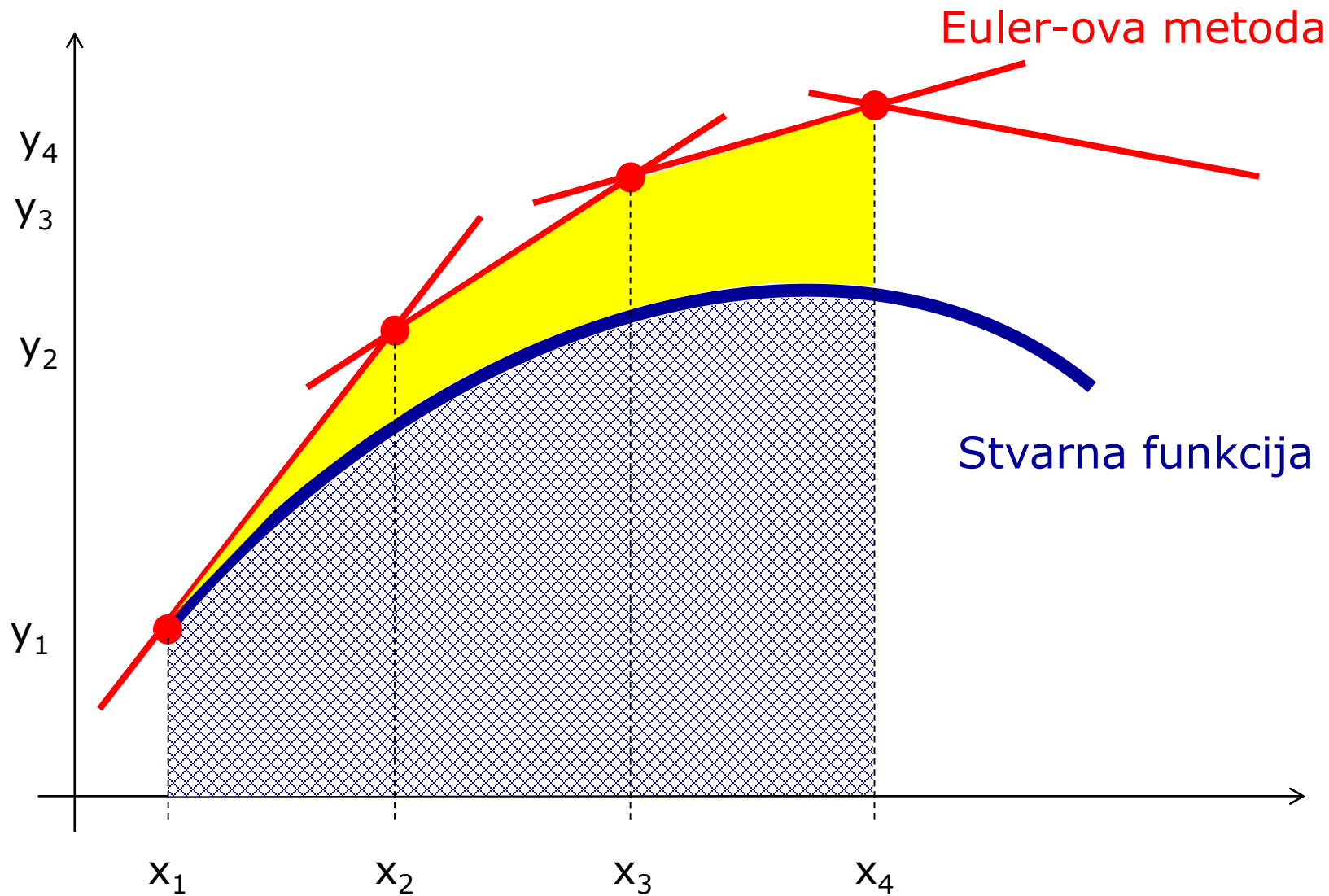
- eksplicitni oblik jednadžbe za primjenu Euler-ove metode je matematički izraz: $y_{(k+1)} = y_{(k)} + h \cdot f(y_{(k)}, t_{(k)})$

y = vrijednost funkcije

k = korak **iteracije** (iteracija je ponavljanje izračuna)

h = korak **integracije** (integriranje je izračunavanje površine ispod krivulje)

t = vrijeme za koje se izračunava vrijednost funkcije

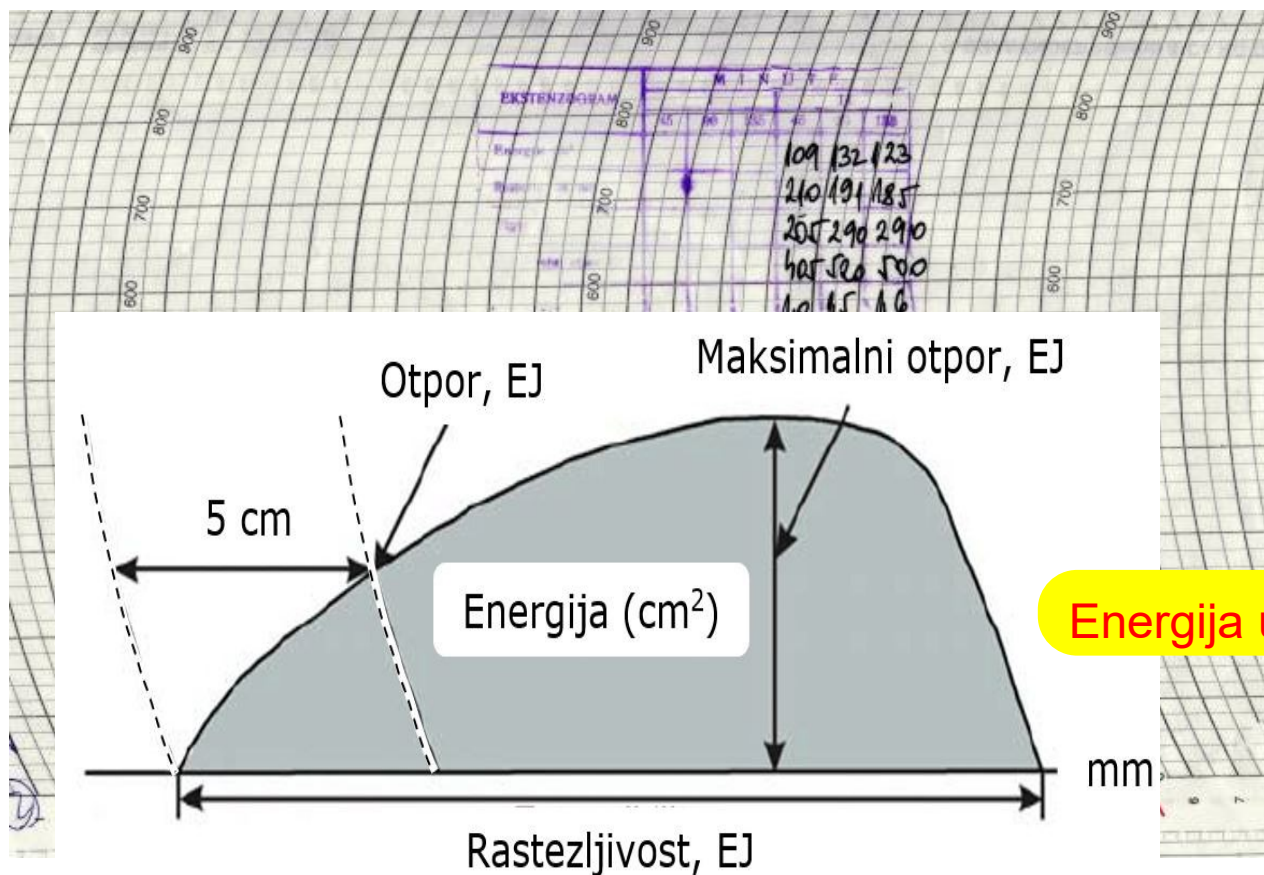


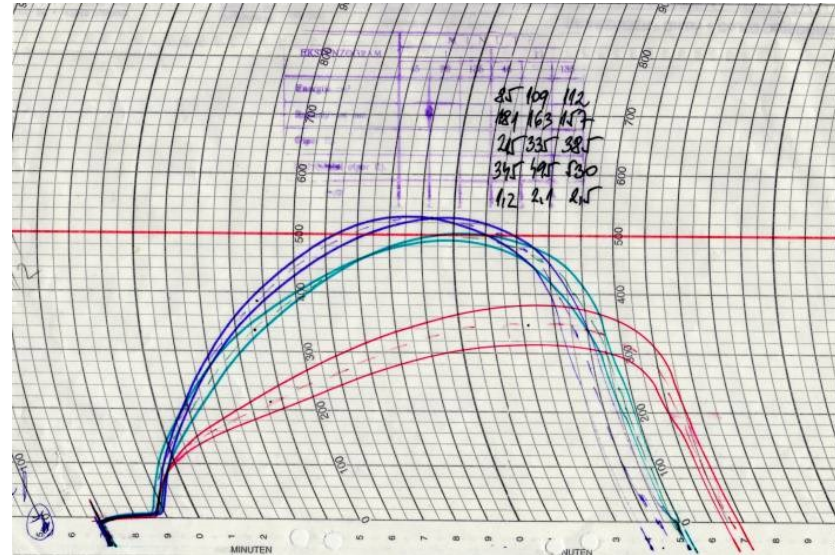
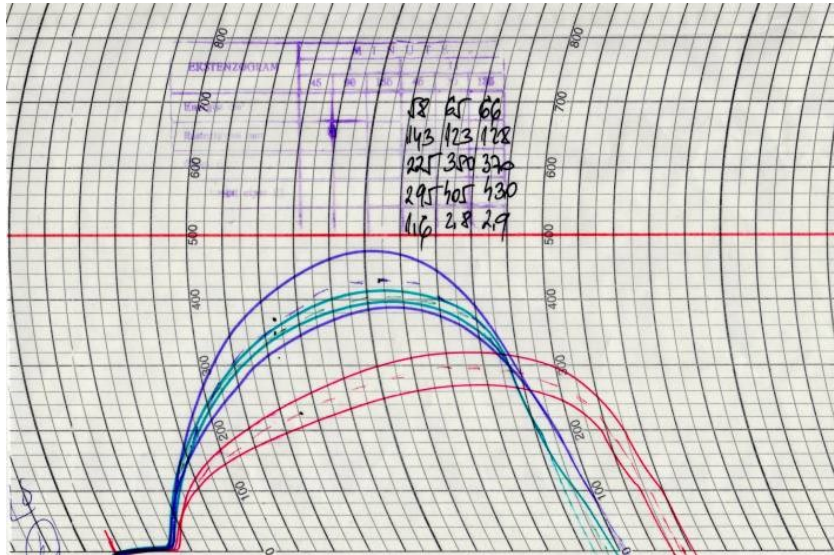
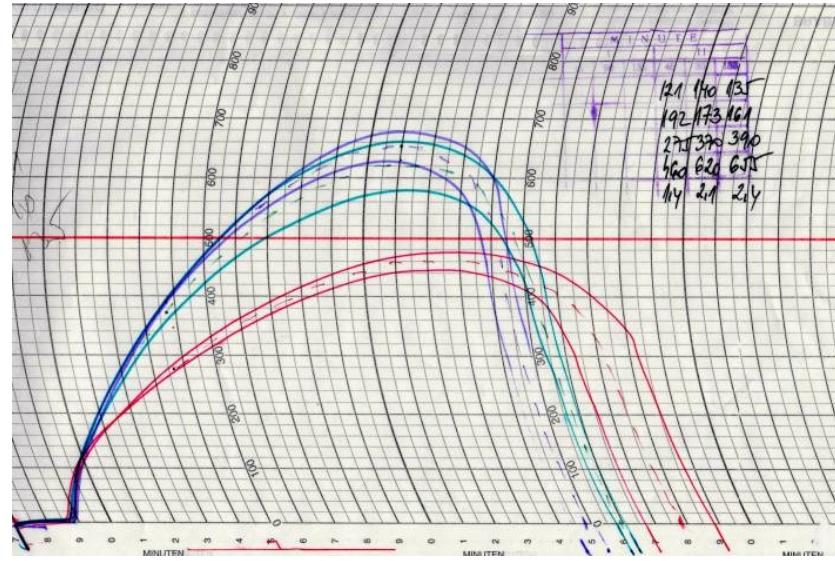
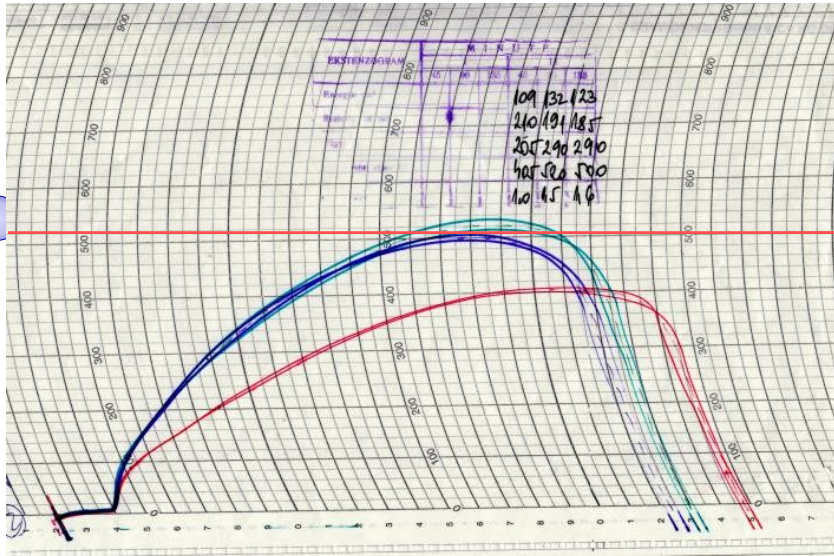
Rješenja izračunata primjenom numeričkih metoda samo su aproksimacije stvarnih rješenja.

Primjer iz tehnologije proizvodnje i prerade brašna:

Ekstenzograf je uređaj koji bilježi krivulju koja nastaje mjerenjem otpora i duljine tijesta pri rastezanju, sve do trenutka kidanja.

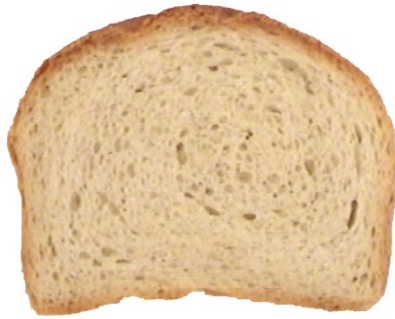
Rezultat je prikazan na ekstenzogramu:



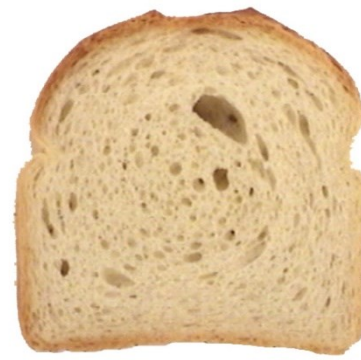




Ana



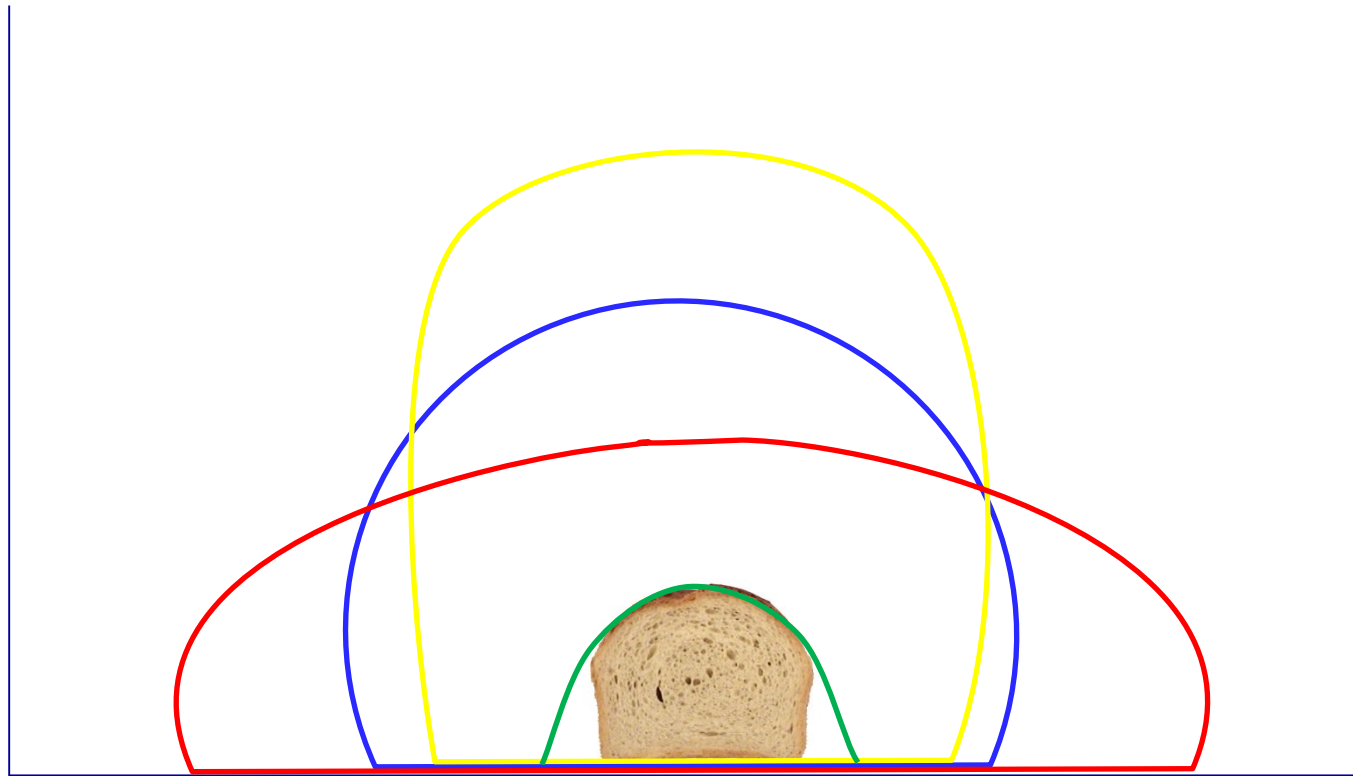
Srpanjka



Divana

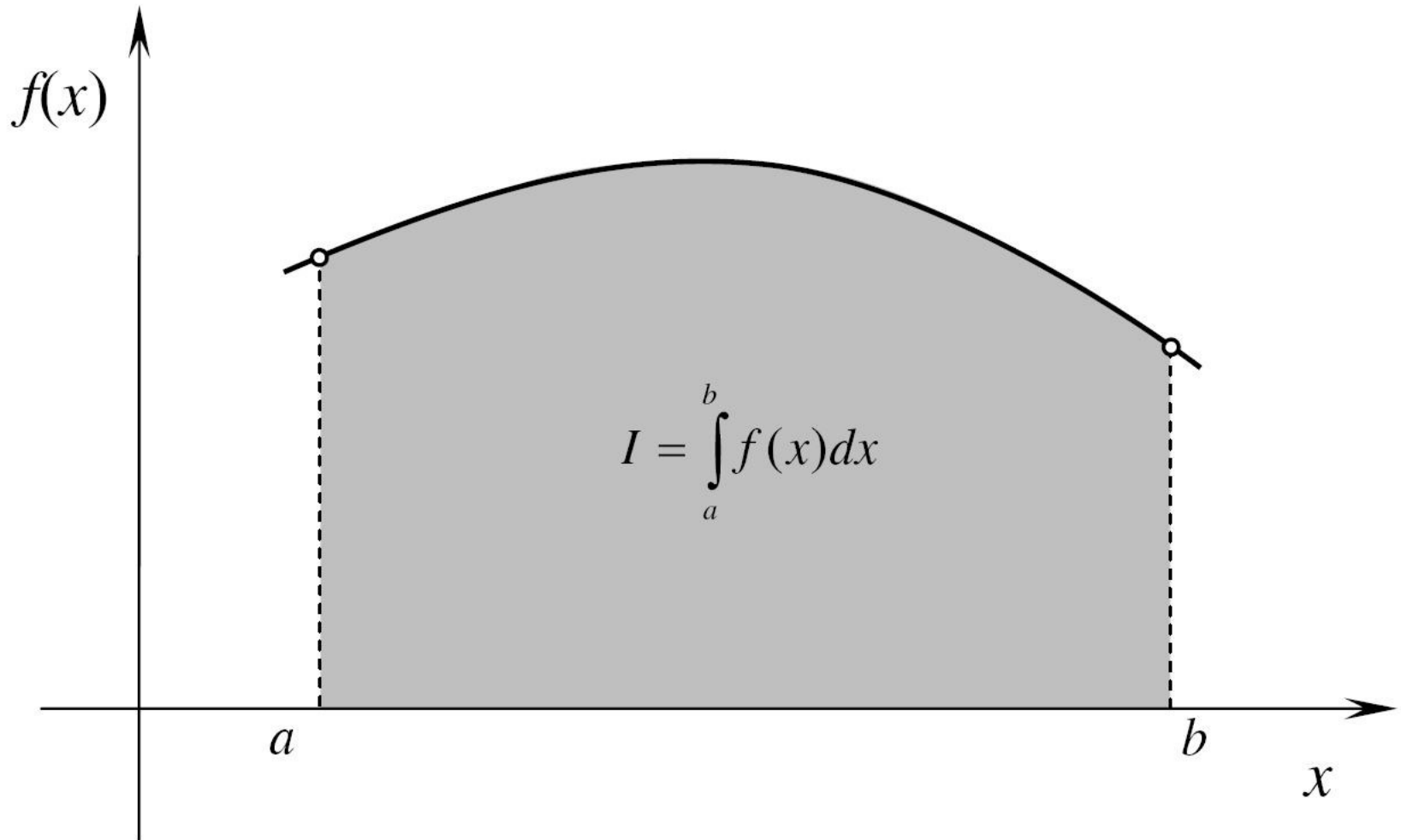


Bezostaja



Soissons

- Presjek vekne kruha prikazana je krivuljom.
- Površina ispod krivulje neke funkcije je **integral funkcije**.
- Za izračunati površinu presjeka potrebno je izračunati



PRIMJER:

- zadana je diferencijalna jednačba: $\frac{dy}{dt} = 0.2 \cdot (t - y)$

- opći oblik iterativne formule kod Euler-ove metode je

najjednostavnija aproksimacija krivulje

(dobivena je upotrebom samo prve članova Taylor-ovog reda)

$$Y_{(k+1)} = Y_{(k)} + h \cdot f(t_{(k)}, Y_{(k)})$$

- gdje je:

indeks k = korak iteracije ($k = 1, 2, 3, \dots$)

konstanta h = korak integracije ($h = 0.5$)

Za zadanu jednačbu iterativna formula je:

$$Y_{(k+1)} = Y_{(k)} + h \cdot 0.2 (t_{(k)} - Y_{(k)})$$

integracija \neq iteracija

- neka je korak integracije $h = 0.5$, $t_0 = 0$ i $y_0 = 0$
- vrijednost varijable t se povećava (npr. vrijeme u sekundama) u svakoj sljedećoj iteraciji za zadani korak integracije h ($h = 0.5$ sekundi)
- korak integracije h je konstantan i za svako izračunavanje ima vrijednost $h = 0.5$

$$Y_{(k+1)} = y_{(k)} + h \cdot f(t_{(k)}, Y_{(k)})$$

$$\frac{dy}{dt} = 0.2 \cdot (t - y)$$

$$Y_{k+1} = y_k + h \cdot 0.2 (t_k - y_k)$$

- neka je korak integracije $h = 0.5$, $t_0 = 0$ i $y_0 = 0$

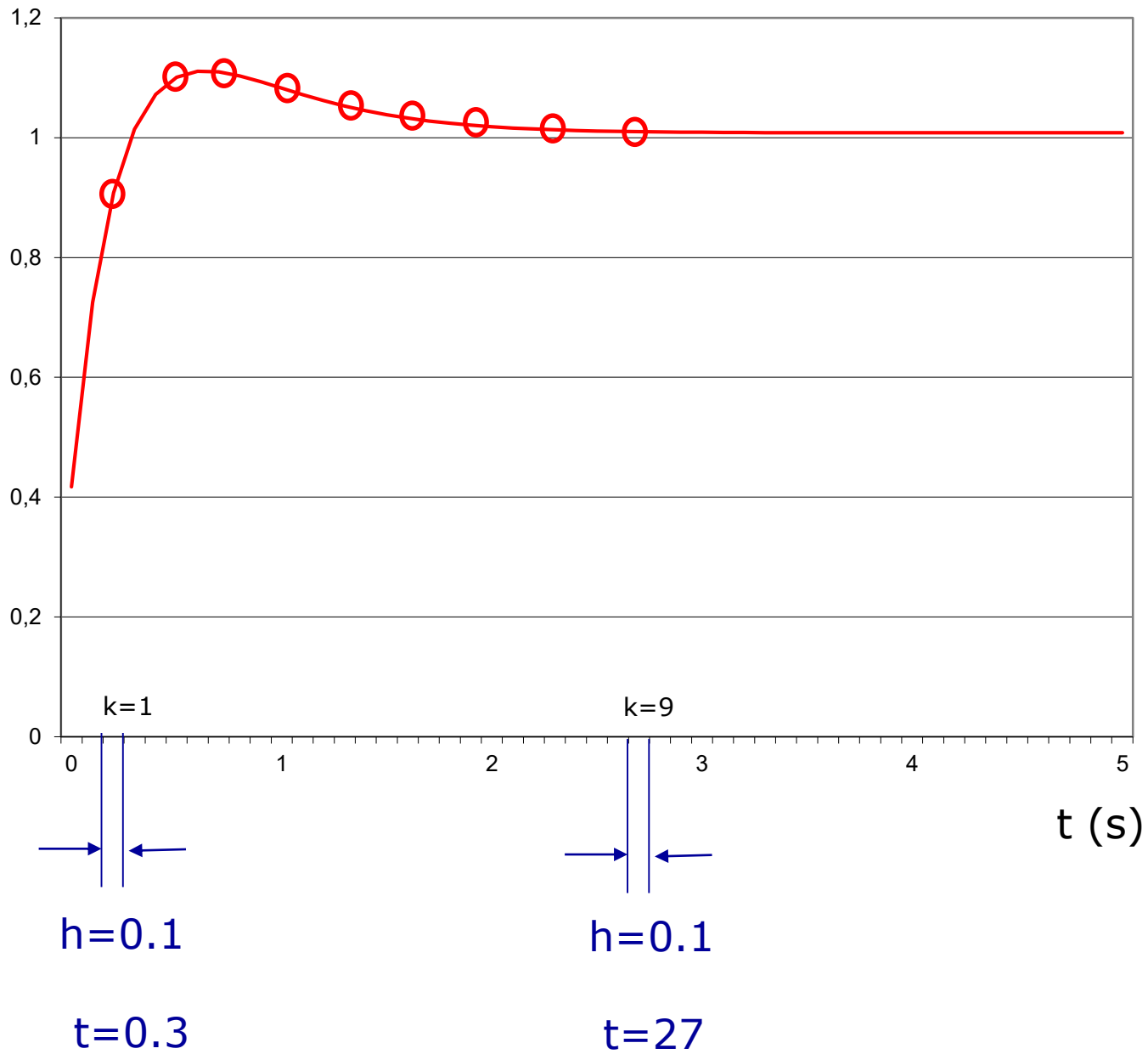
$$y_1 = y_0 + h \cdot 0.2 (t_0 - y_0) = 0 + 0.5 \cdot 0.2 (0 - 0) = 0$$

$$y_2 = y_1 + h \cdot 0.2 (t_1 - y_1) = 0 + 0.5 \cdot 0.2 (0.5 - 0) = 0.05$$

$$y_3 = y_2 + h \cdot 0.2 (t_2 - y_2) = 0.05 + 0.5 \cdot 0.2 (1 - 0.05) = 0.145$$

...

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot 0.2 (t_k - y_k)$$



Iterativnim izračunavanjem dobiveni su sljedeći rezultati kao parovi točaka (x_k, y_k) kojima prolazi integralna krivulja koja predstavlja grafički prikaz integrirane funkcije $f(x) = dy/dt$:

k	$t_{(k)}$	$Y_{(k)}$
0	0	0
1	0.5	0
2	1	0.05
3	1.5	0.145
4	2	0.2805
5	2.5	0.45245
...

Euler-ova metoda aproksimira krivulju pravcem (tangentom) u svakoj iteraciji.

Korigirana Euler-ova metoda

Korekcija Euler-ove metode izvodi se tako da se u polovištu između $t_{(k)}$ i $t_{(k+1)}$ povuče tangenta na krivulju, pa pogreška u $y_{(k+1)}$ postaje manja nego kod obične Euler-ove metode.

Opći oblik iterativne formule je:

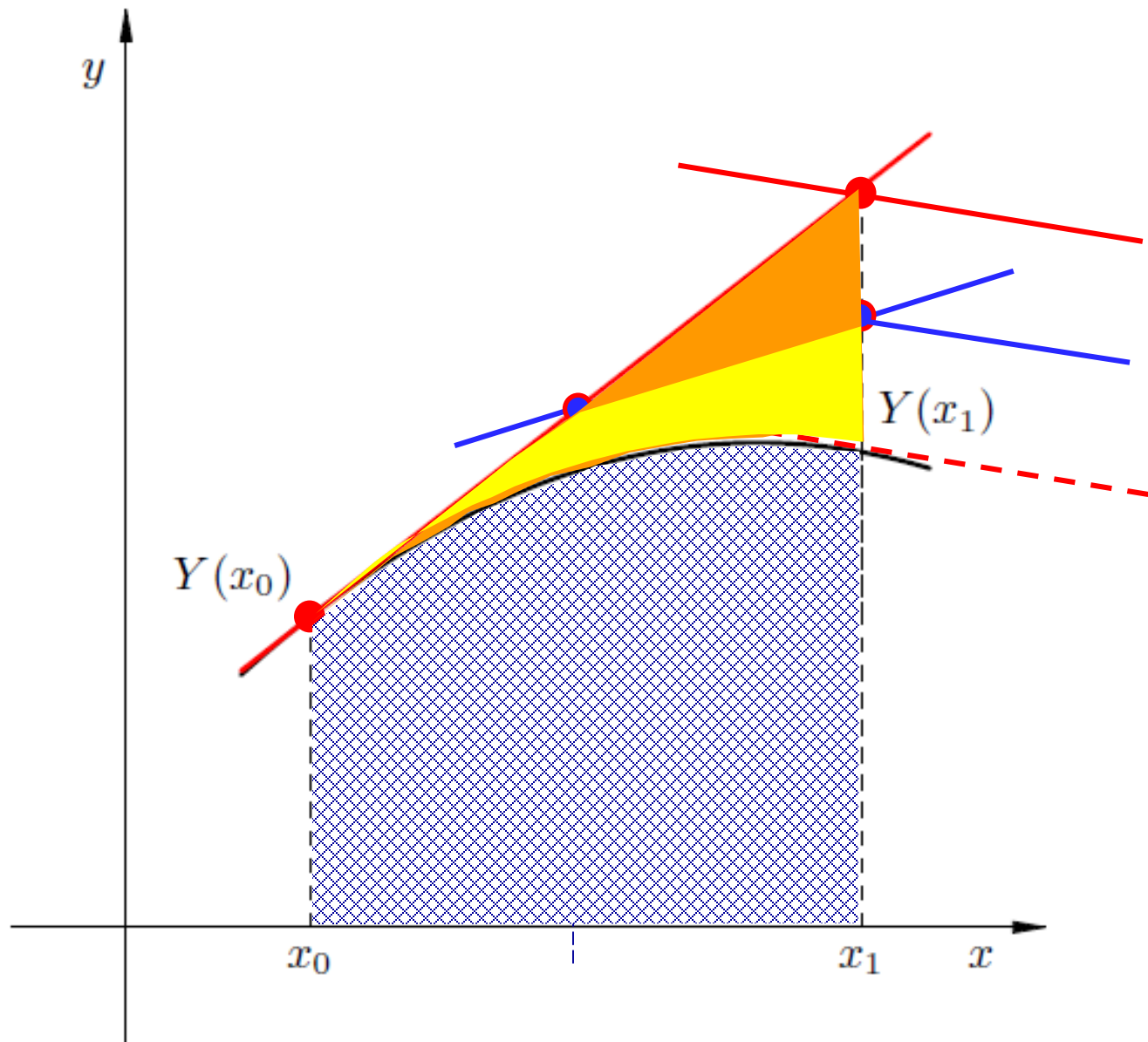
$$y_{k+1} = y_k + h \cdot \frac{1}{2} \left[f(y_k, t_k) + f\left(y_k + h \cdot f(y_k, t_k), t_{k+1}\right) \right]$$

Za zadanu diferencijalnu jednažbu iterativna formula je:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{1}{5}(t_k - y_k) + \frac{1}{5} \left(t_{k+1} - h \cdot \frac{1}{5}(t_k - y_k) \right) \right]$$

Iterativnim izračunavanjem dobiveni su sljedeći rezultati kao parovi točaka (x_k, y_k) kojima prolazi integralna krivulja koja predstavlja grafički prikaz integrirane funkcije $f(x) = dy/dt$:

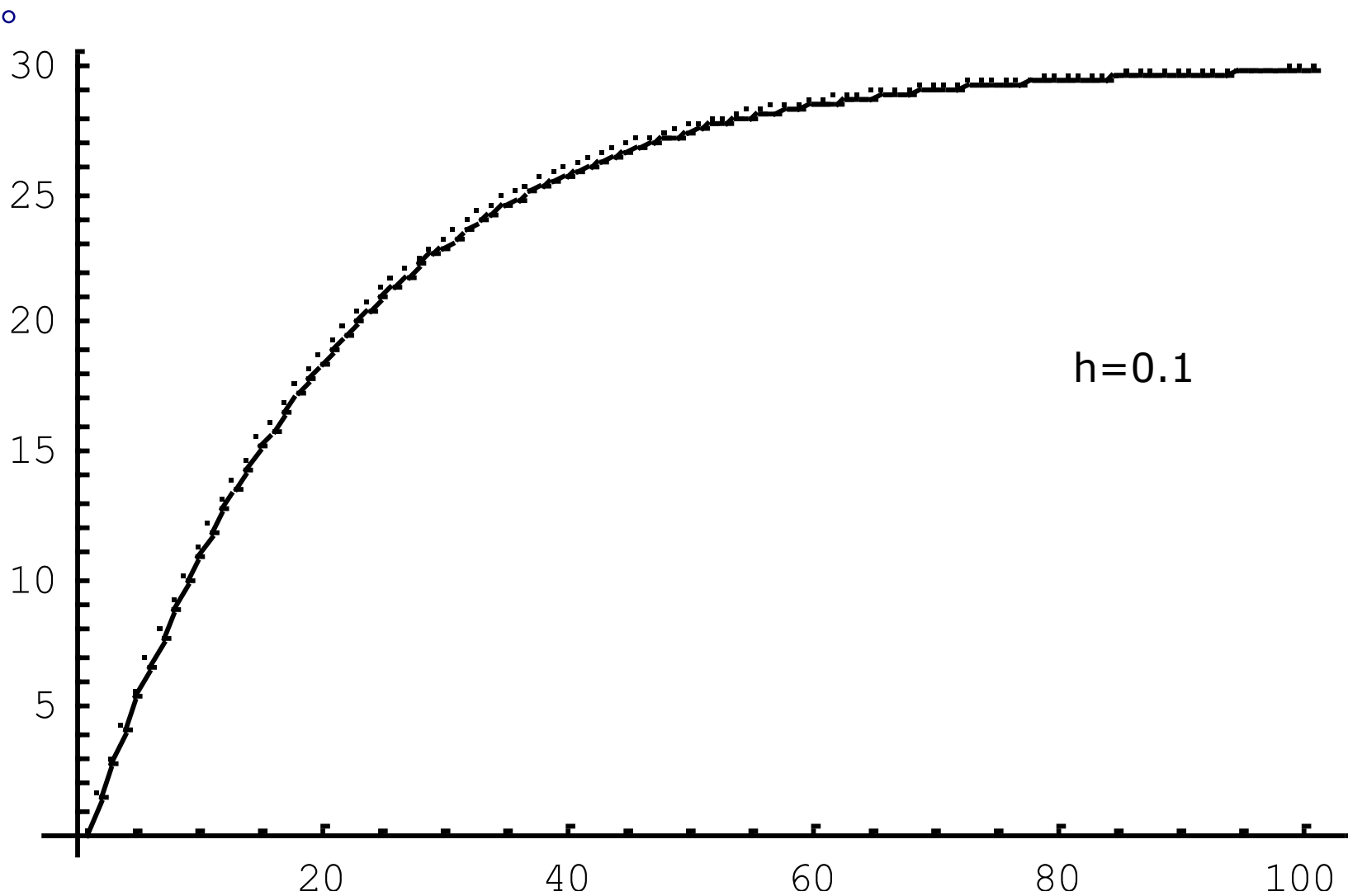
k	$t_{(k)}$	$Y_{(k)}$
0	0	0
1	0.5	0.025
2	1	0.0964
3	1.5	0.2120
4	2	0.3670
5	2.5	0.5683
6	3	0.8053
7	3.5	1.0790
...



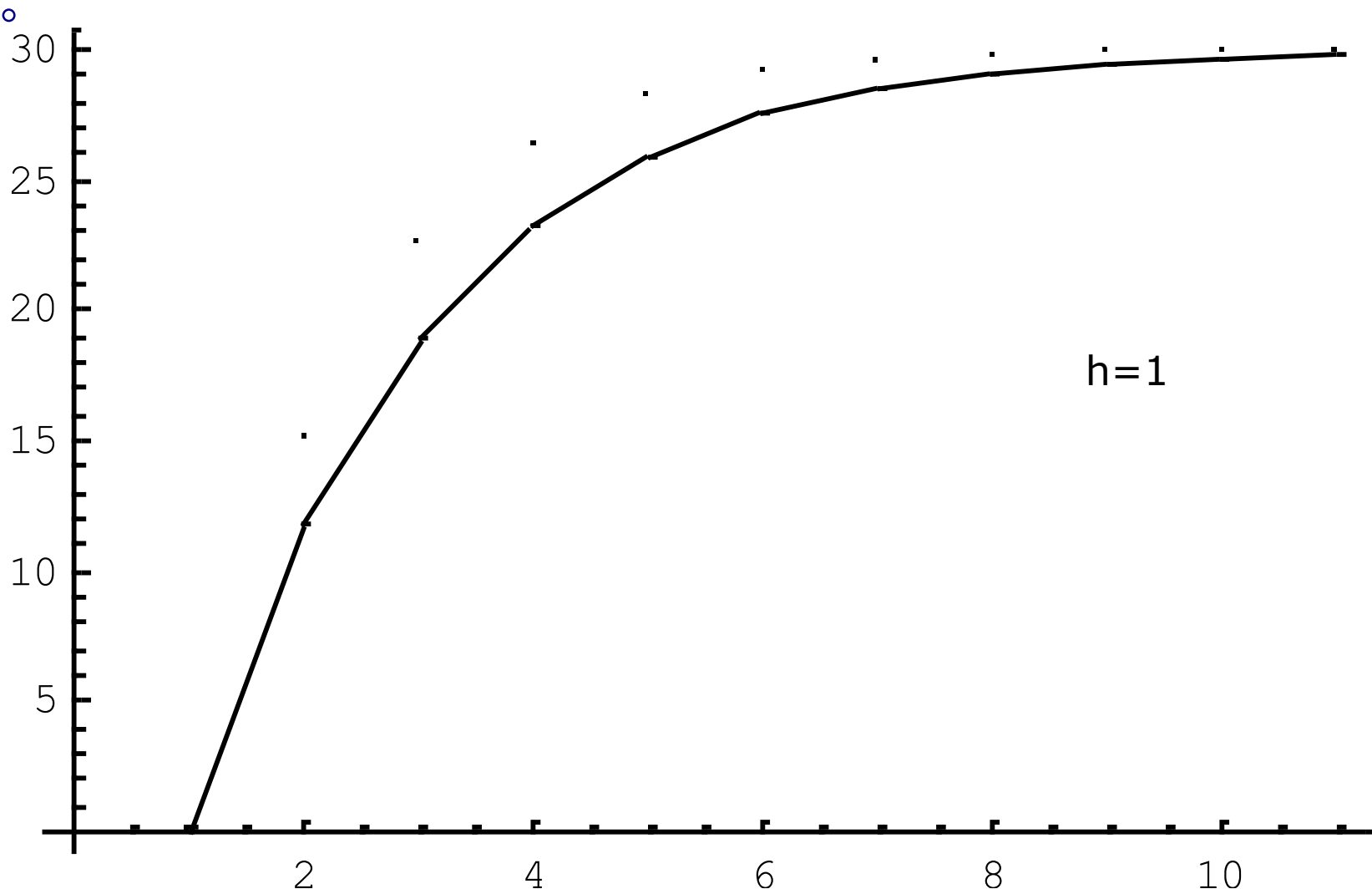
— Euler-ova metoda

— Korigirana E. metoda

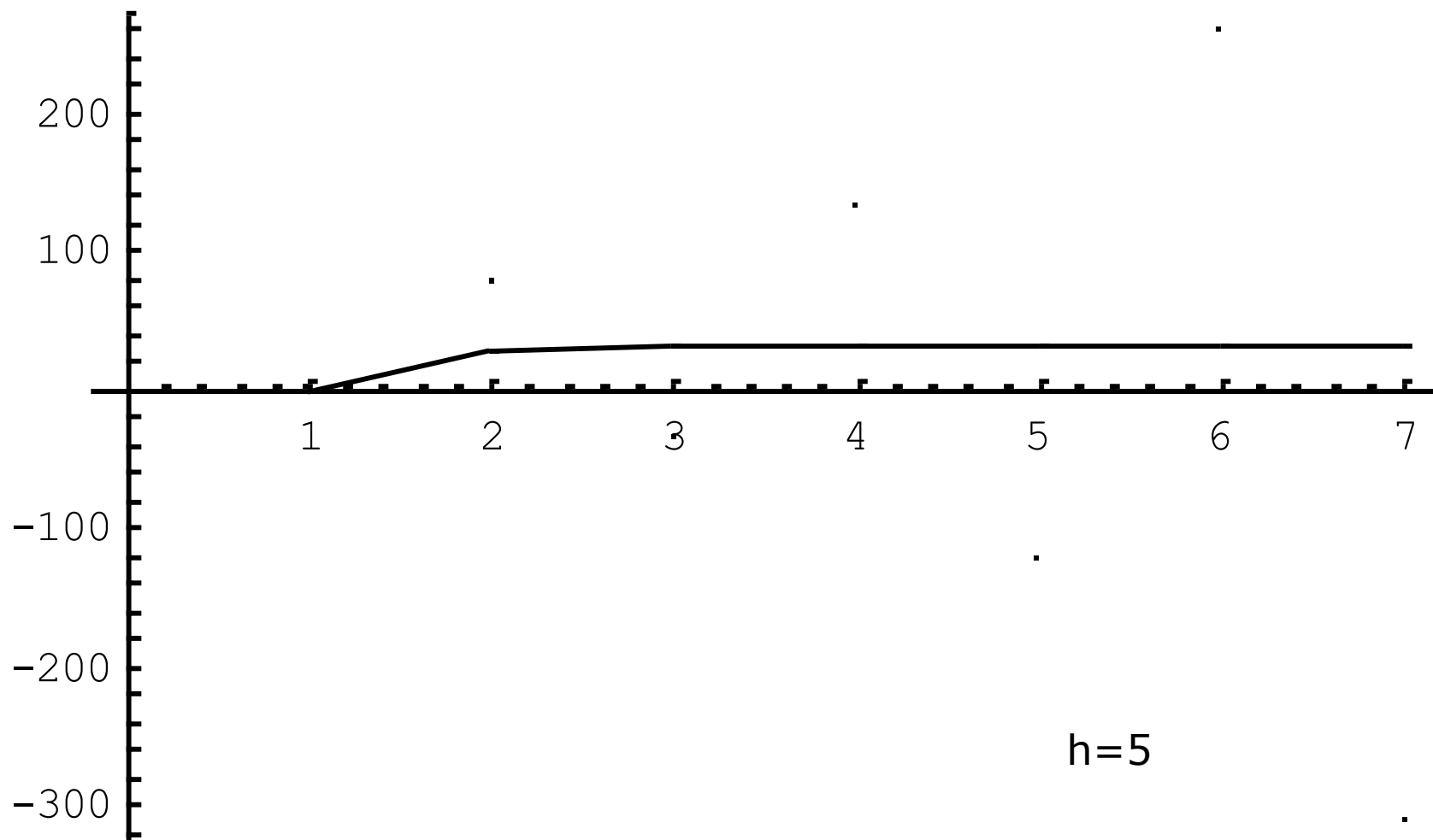
- Za mali korak integracije ($h=0.1$) metoda preciznije aproksimira funkciju



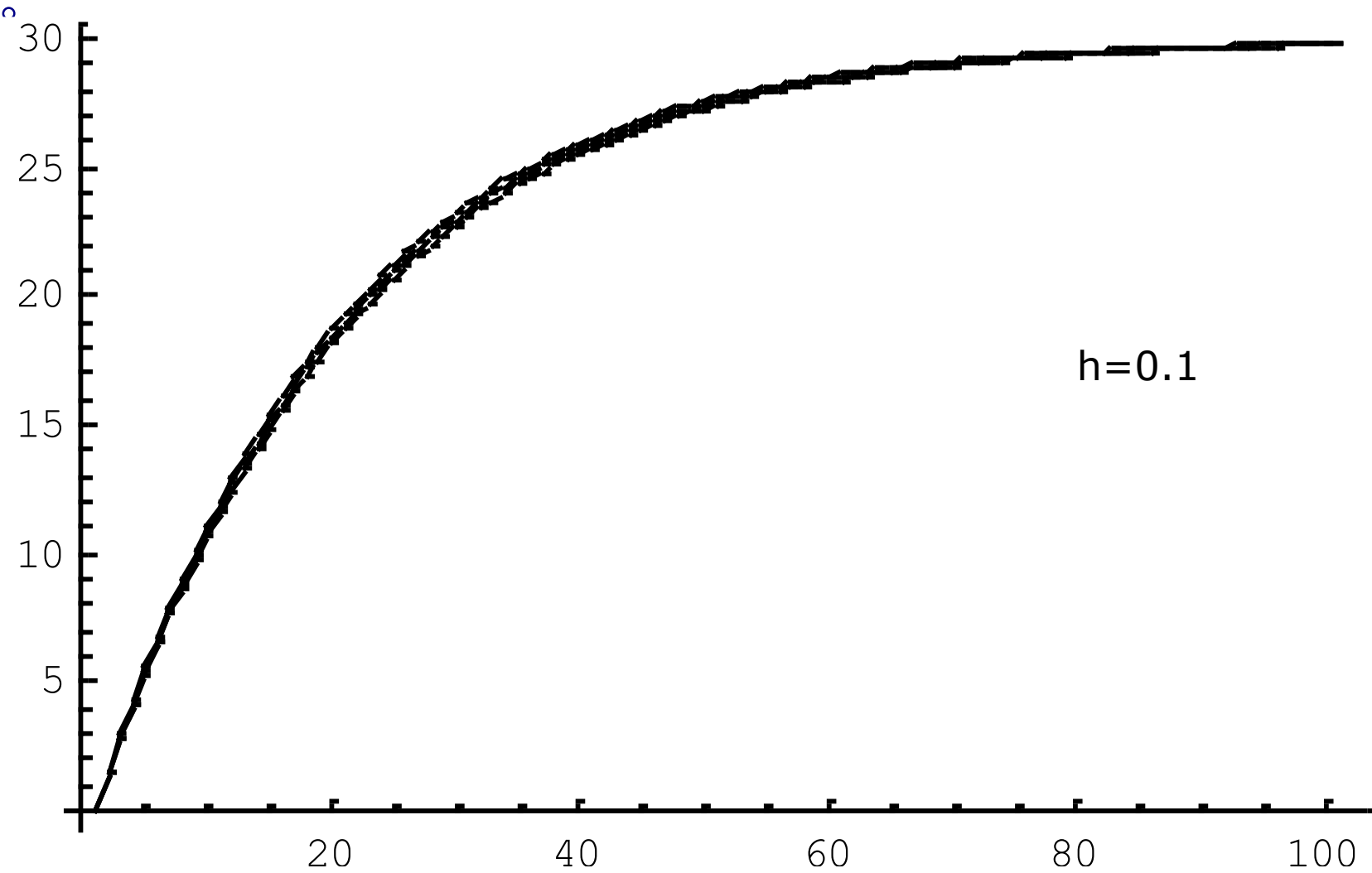
- Za veliki korak integracije ($h=1$) metoda manje precizno aproksimira funkciju

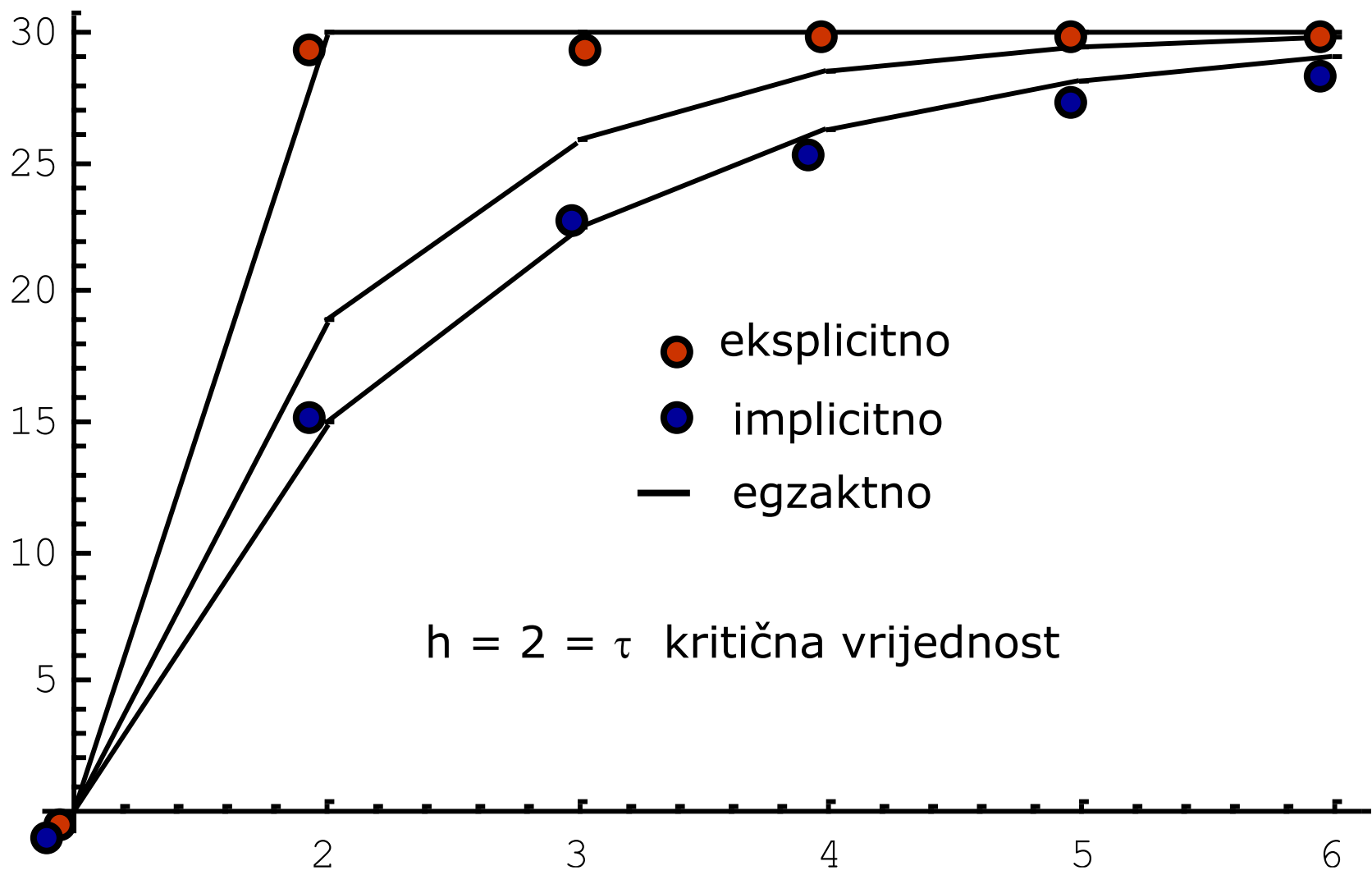



- Za jako veliki korak integracije ($h=5$) metoda ne može precizno aproksimirati funkciju, a niz izračunatih rješenja je divergentan



Usporedba eksplicitne i implicitne Eulerove metode





- 
- bolje metode od Euler-ove imaju više koraka o kojima ovisi iduća aproksimacija
 - najpoznatije su Runge-Kutta metode, osobito Runge-Kutta metoda četvrtog reda

Metoda integracije: Runge Kutta 2 - jednađbe

Zadan je sustav jednađbi

$$\frac{d}{dt} \vec{y}(t) = \vec{f}(\vec{y}, t)$$

Prvi korak (prva tangenta)

$$\vec{k}_1 = h \cdot \vec{f}(\vec{y}_i, t_i)$$

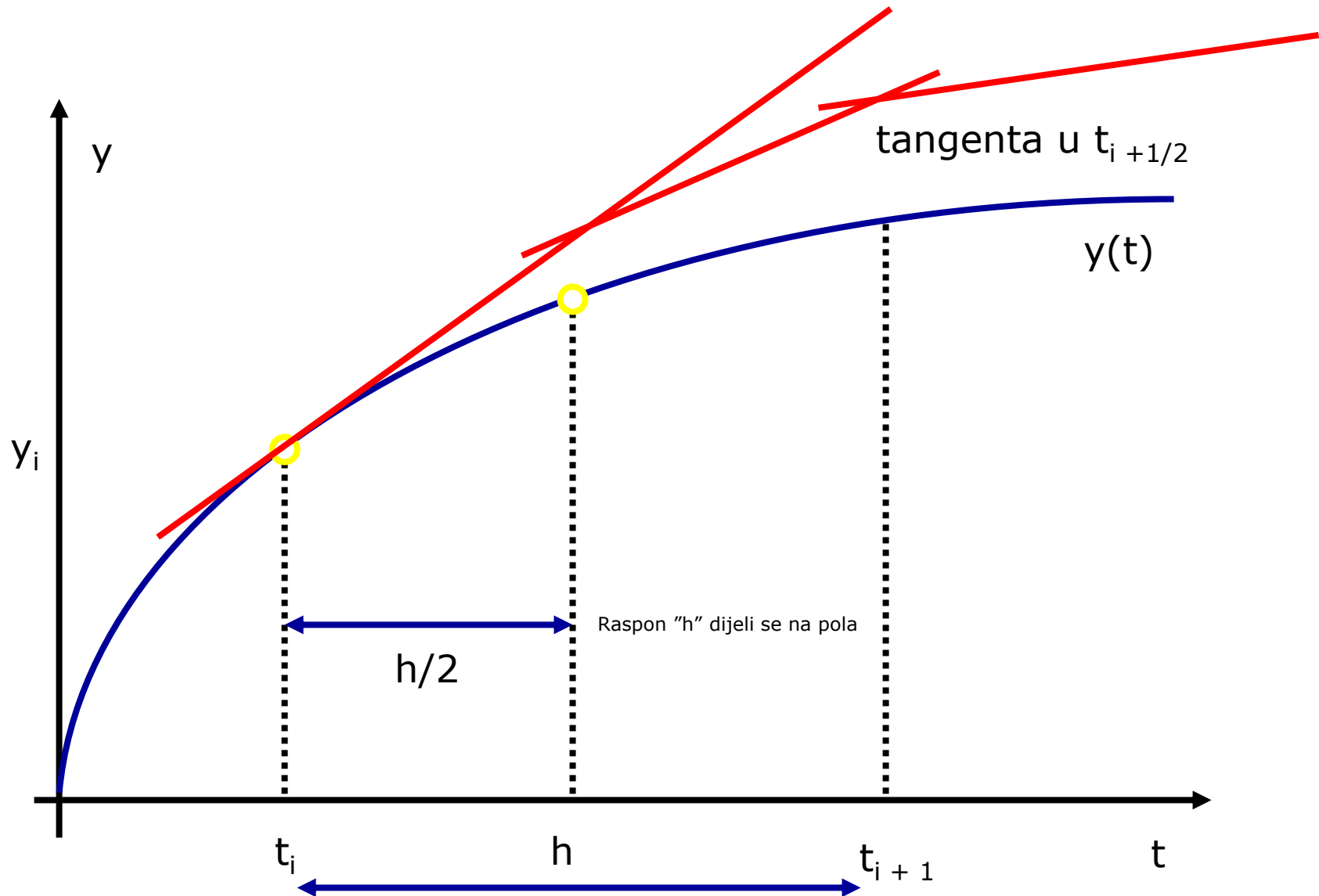
Drugi korak (druga tangenta)

$$\vec{k}_2 = h \cdot \vec{f}\left(\vec{y}_i + \frac{1}{2} \cdot \vec{k}_1\right)$$

Konačni izraz

$$\vec{y}_{i+1} = \vec{y}_i + \vec{k}_2$$

Metoda integracije: Runge Kutta 2





Što zapravo predstavlja ova plava krivulja u primjerima?

Predstavlja grafički prikaz promjene neke mjerne veličine (veličine stanja).

To može biti promjena temperature materijala, udjela suhe tvari u materijalu, viskoziteta itd.

Metoda integracije: Runge Kutta 4

Postupak se provodi u 4 koraka:

1) tangenta na lijevom rubu

$$\vec{k}_1 = h \cdot \vec{f}(\vec{y}_i, t_i)$$

2) tangenta u polovištu

$$\vec{k}_2 = h \cdot \vec{f}\left(\vec{y}_i + \frac{1}{2} \cdot \vec{k}_1\right)$$

3) tangenta u polovištu

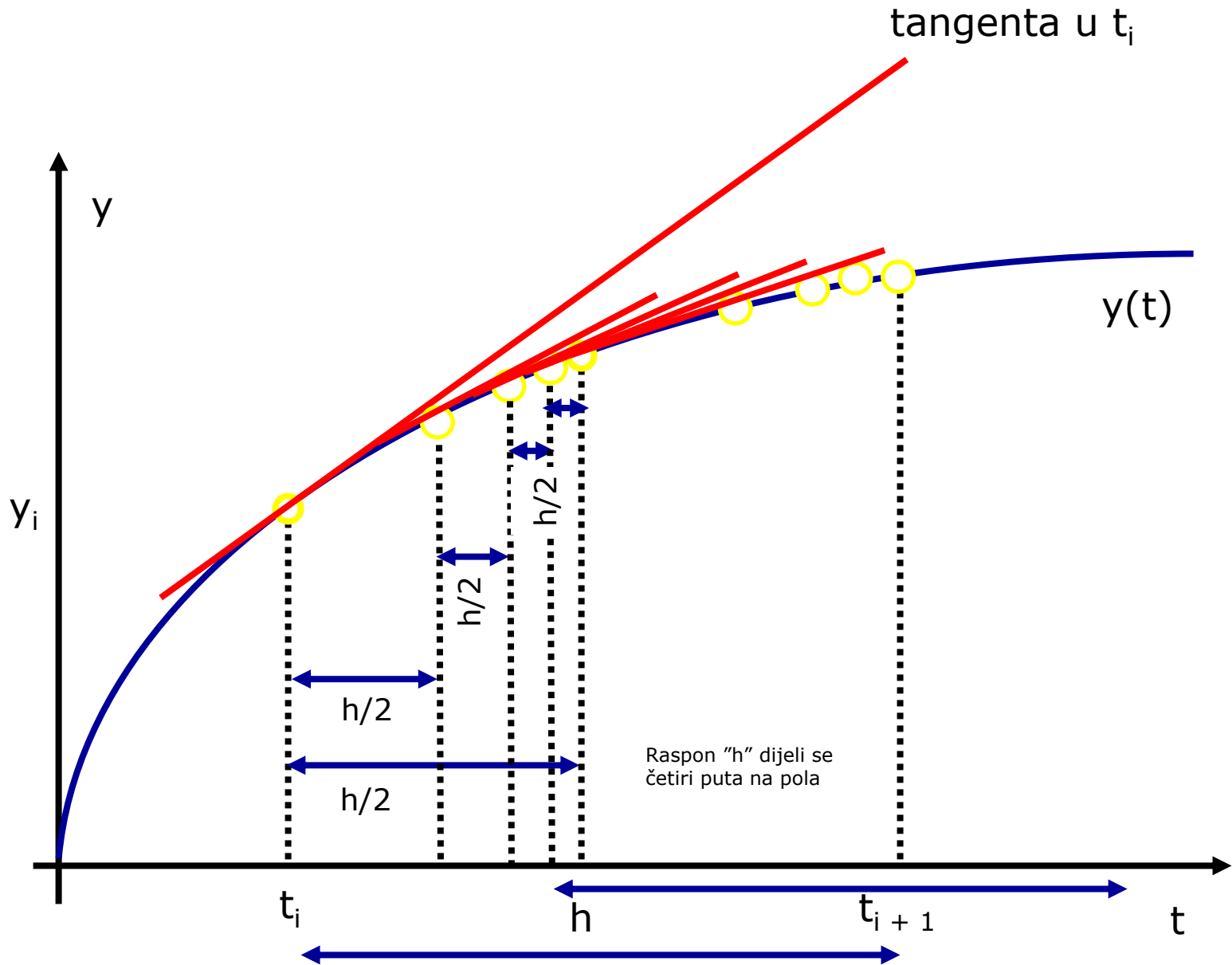
$$\vec{k}_3 = h \cdot \vec{f}\left(\vec{y}_i + \frac{1}{2} \cdot \vec{k}_2\right)$$

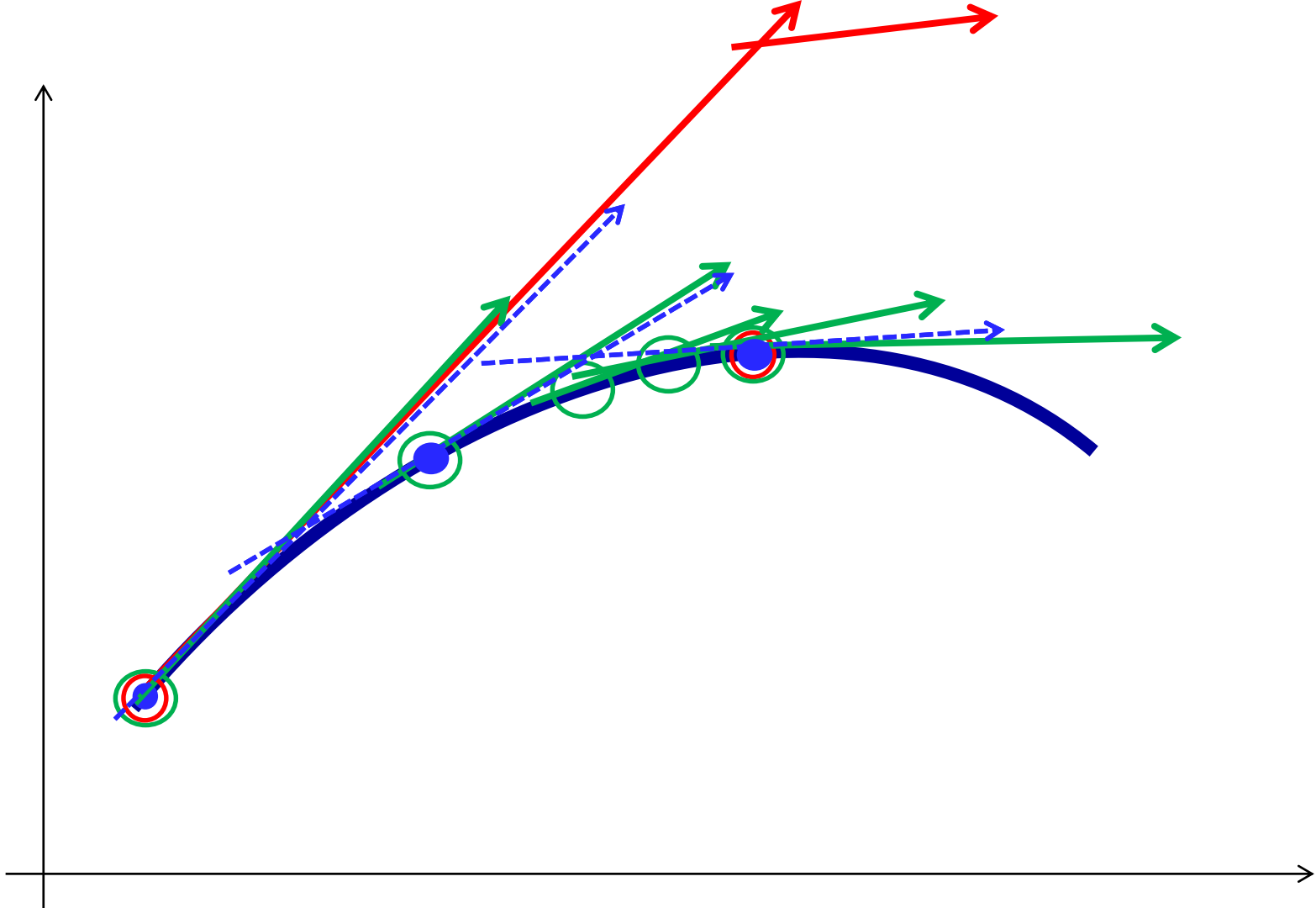
4) tangenta na desnom rubu

$$\vec{k}_4 = h \cdot \vec{f}(\vec{y}_i + \vec{k}_3)$$

$$\vec{y}_{i+1} = \vec{y}_i + \frac{1}{6} \cdot (\vec{k}_1 + 2 \cdot \vec{k}_2 + 2 \cdot \vec{k}_3 + \vec{k}_4)$$

Metoda integracije: Runge Kutta 4





POVEZNICE:

[List of Runge-Kutta methods](#)

[Runge-Kutta methods](#)



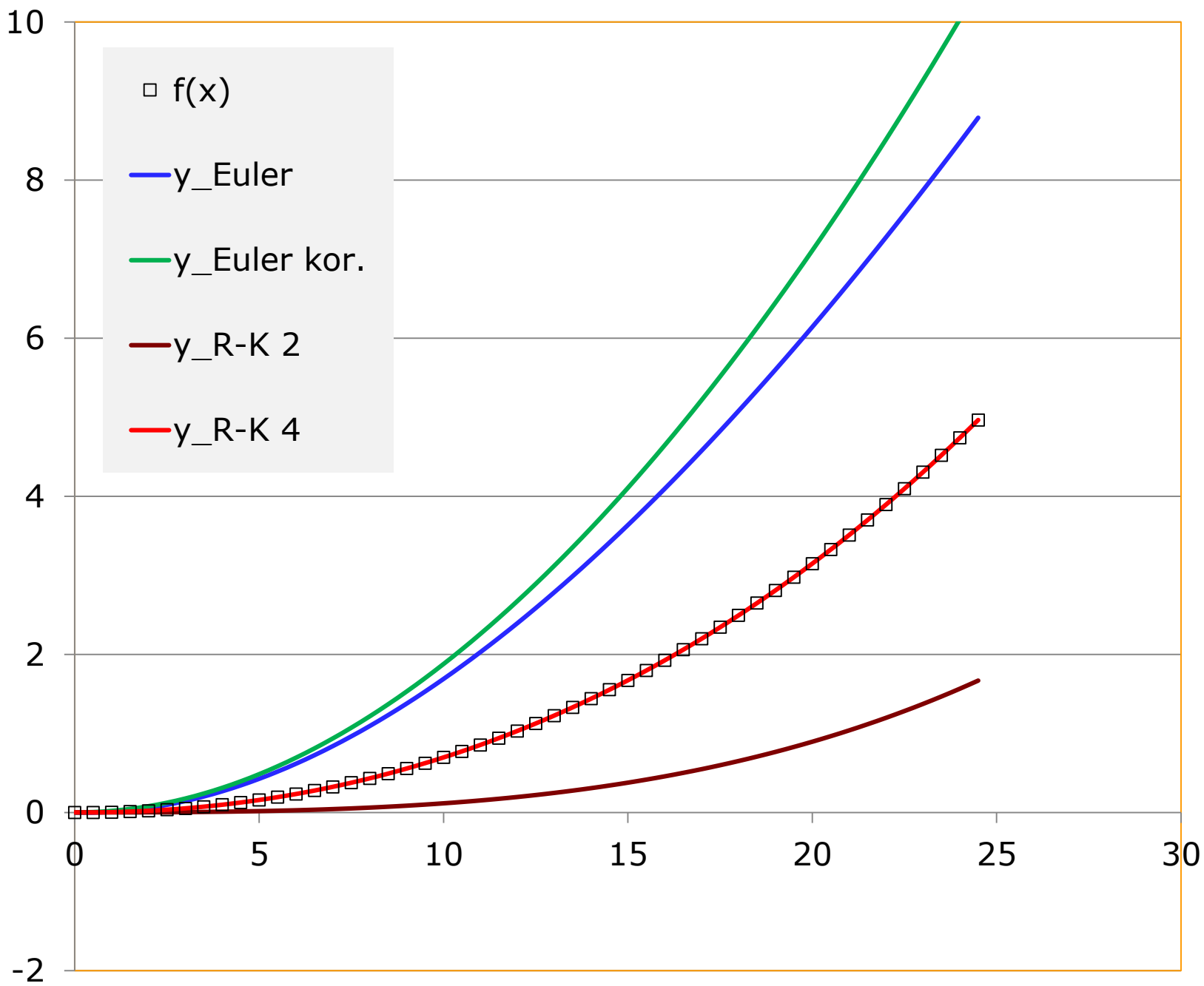
Euler-ova metoda



Runge-Kutta 2



Runge-Kutta 4





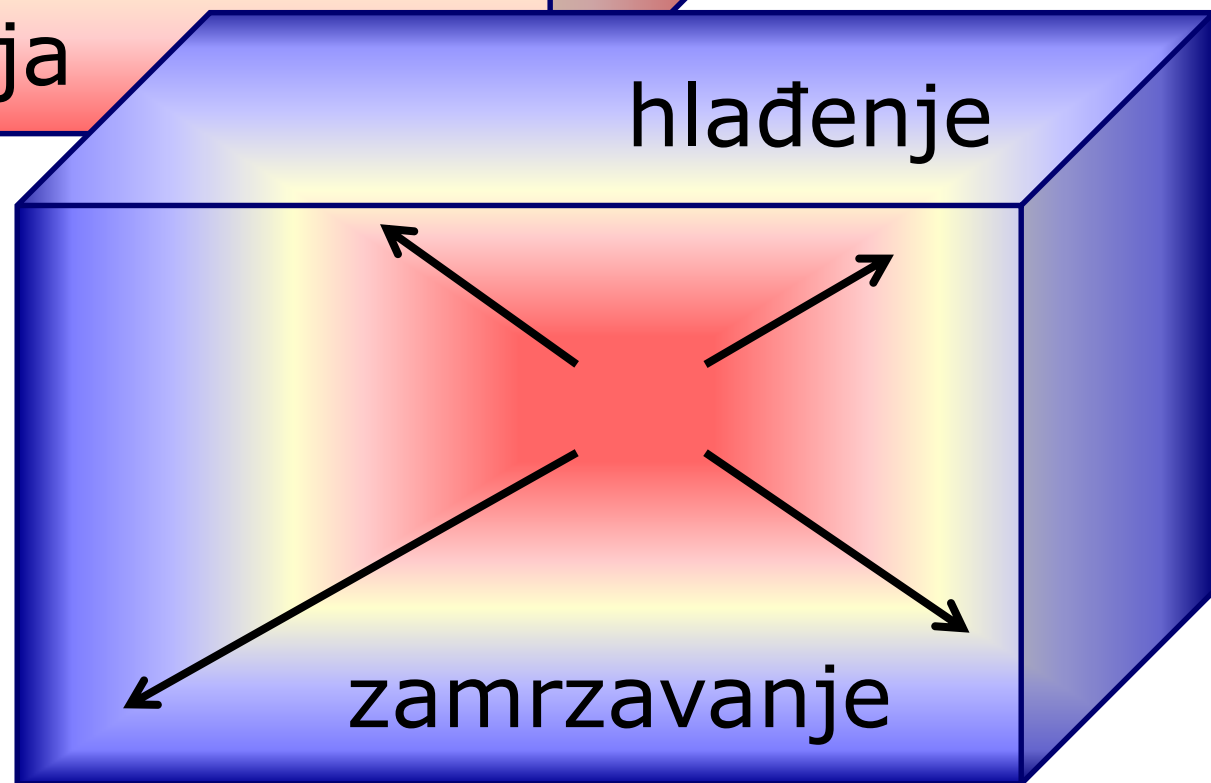
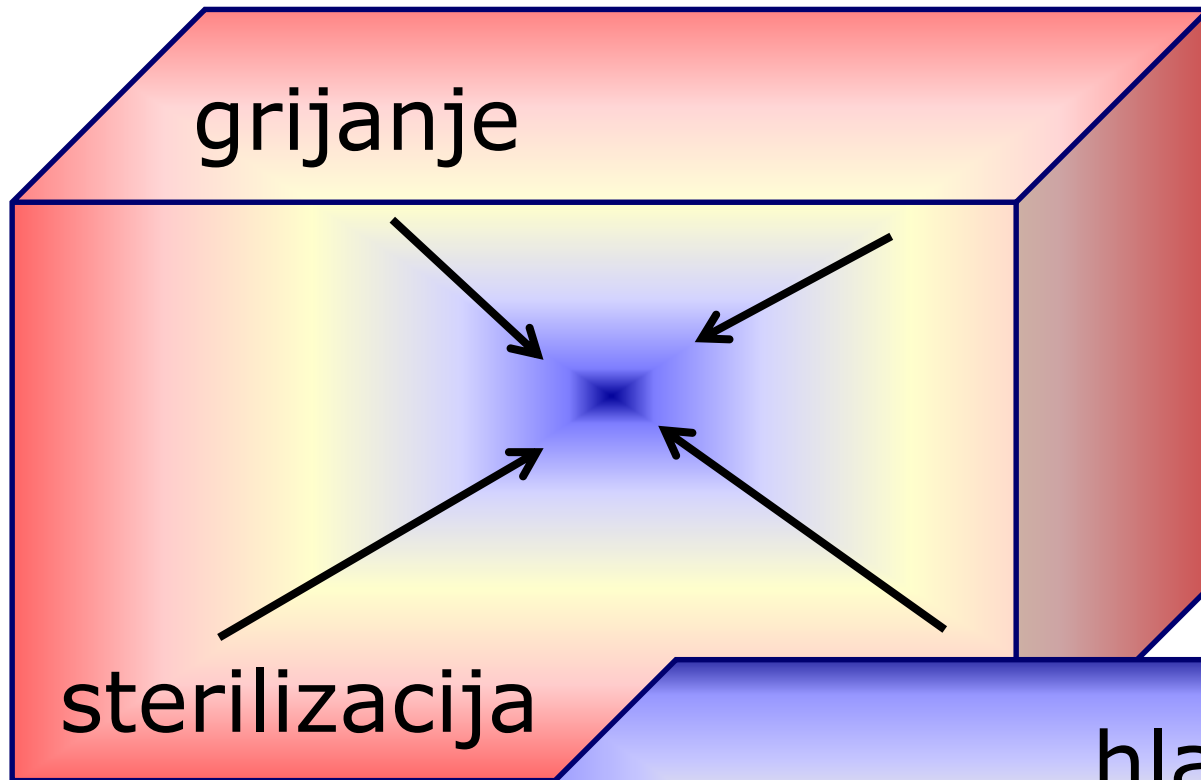
3. Modeli dinamičkih stanja sustava

Model zamrzavanja namirnica

Metoda za rješavanje diferencijalnih jednažbi
(Euler-ova i Runge-Kutta)

Model sterilizacije namirnica

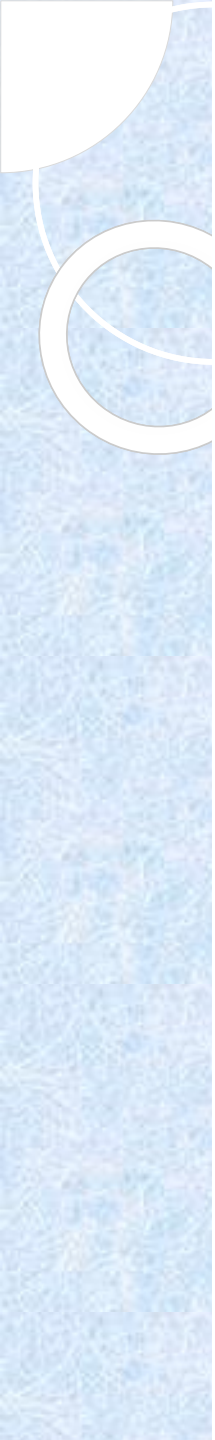
Model upravljanja biokemijskim reaktorom



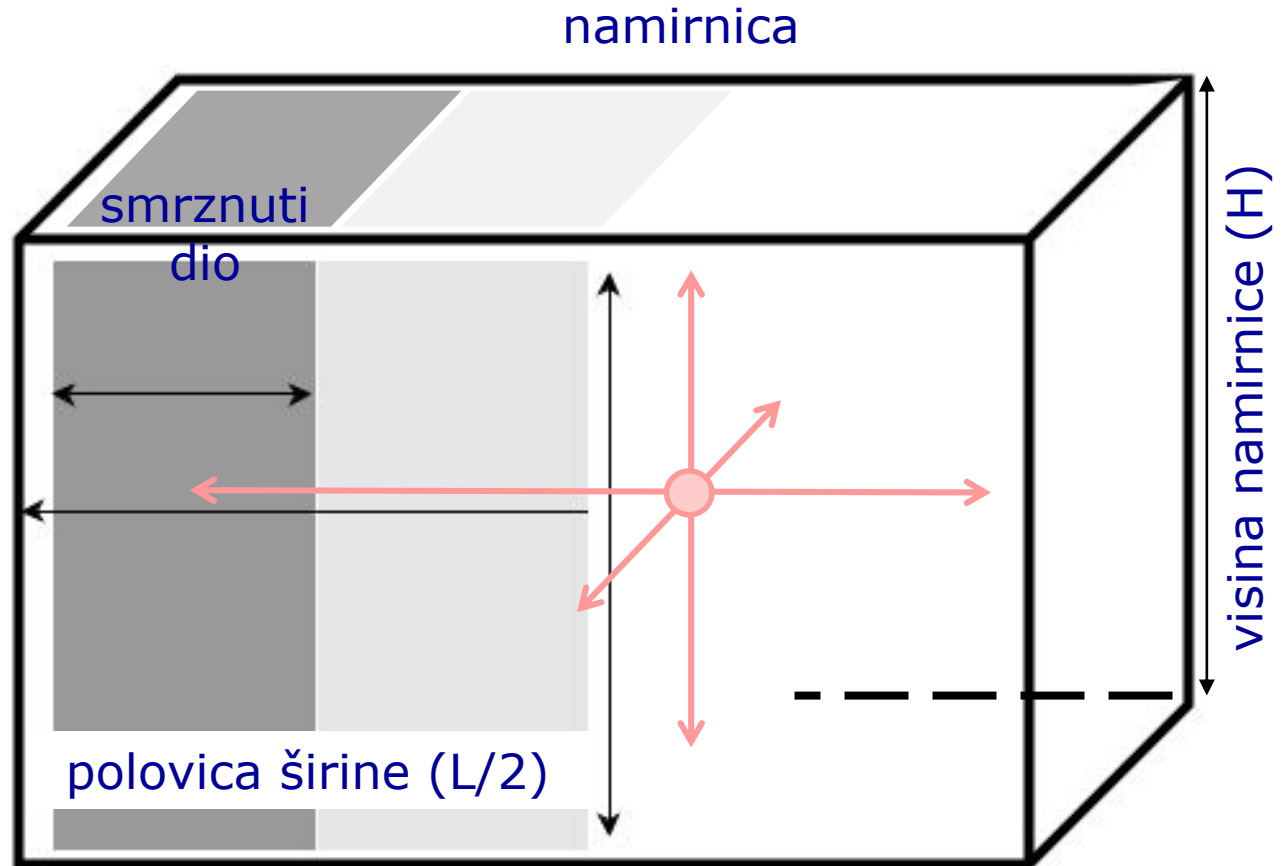
smjer
prijenosa
topline

-20 °C

+20 °C



Model zamrzavanja namirnica

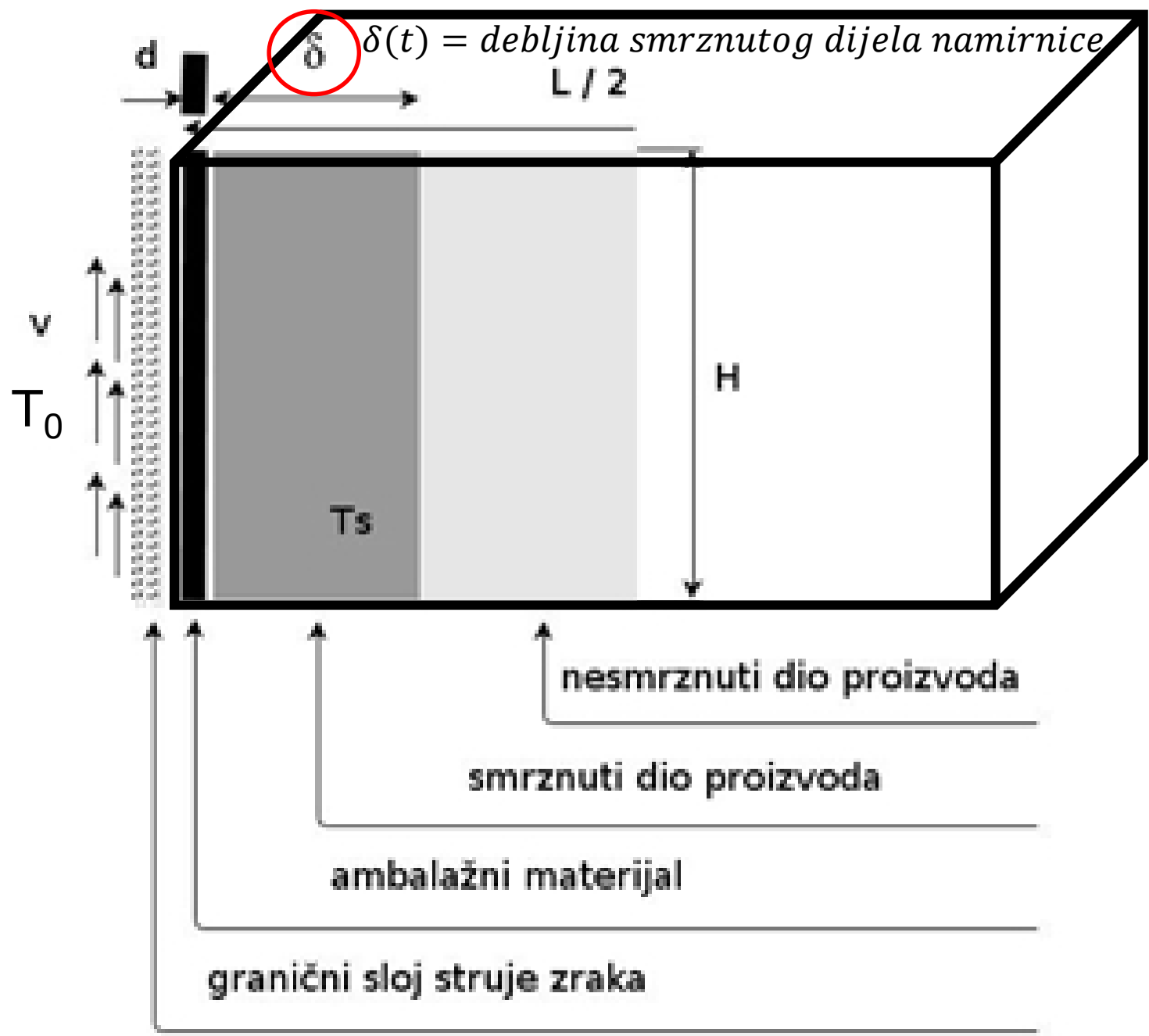


ambalažni materijal



granični sloj struje zraka

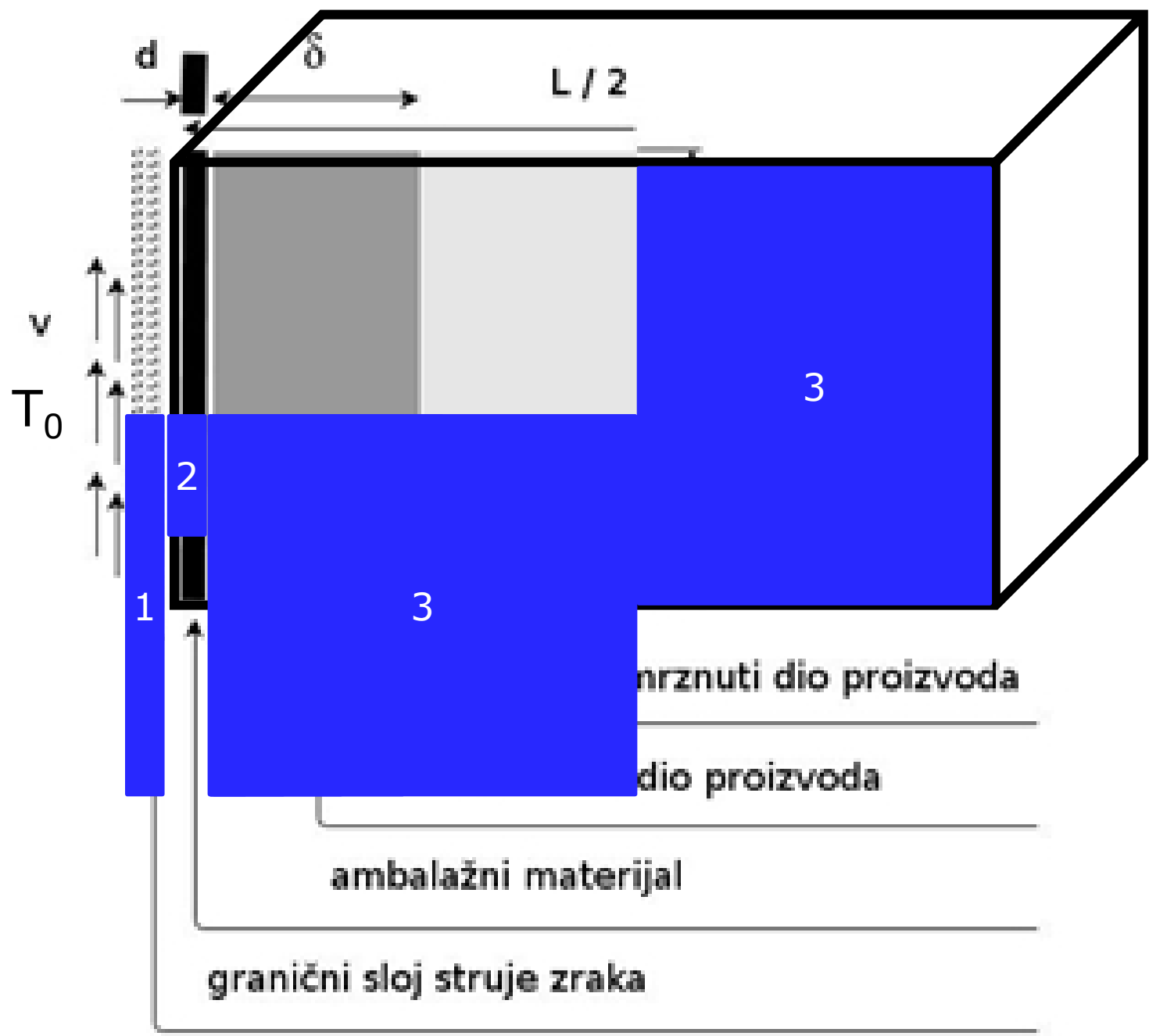
v, T_0 – brzina strujanja i temperatura rashladnog zraka



- model **za analizu** dinamike zamrzavanja prehrambenih proizvoda
- proizvod ima oblik kvadra i nalazi se u ambalaži (pretpostavka!)
- hlađenje se provodi strujanjem hladnog zraka konstantne temperature (pretpostavka!)

- **dinamika procesa zamrzavanja određena je dinamikom prijenosa topline** *s granice nesmrznutog na smrznuti dio proizvoda i s ambalaže na struju hladnog zraka*

- **dinamika prijenosa topline određena je otporima** ($\text{W m}^2 \text{K}^{-1}$):
 1. u graničnom sloju struje zraka (*red veličine* **10^{-2}**),
 2. ambalaže (10^{-5}),
 3. smrznutog dijela proizvoda (**10^{-2}**) i
 4. u graničnom sloju između smrznutog i nesmrznutog dijela proizvoda (10^{-4})





- **matematički model se sastoji od tri dijela:**

1. modela dinamičke bilance topline (R_1 , R_2 , R_3 i R_4),

2. modela otpora prijenosu topline u graničnom sloju i

3. modela sastava prehrambenog proizvoda.

- **dinamika procesa zamrzavanja podijeljena je u tri faze:**

- **u prvoj fazi namirnica se hladi**

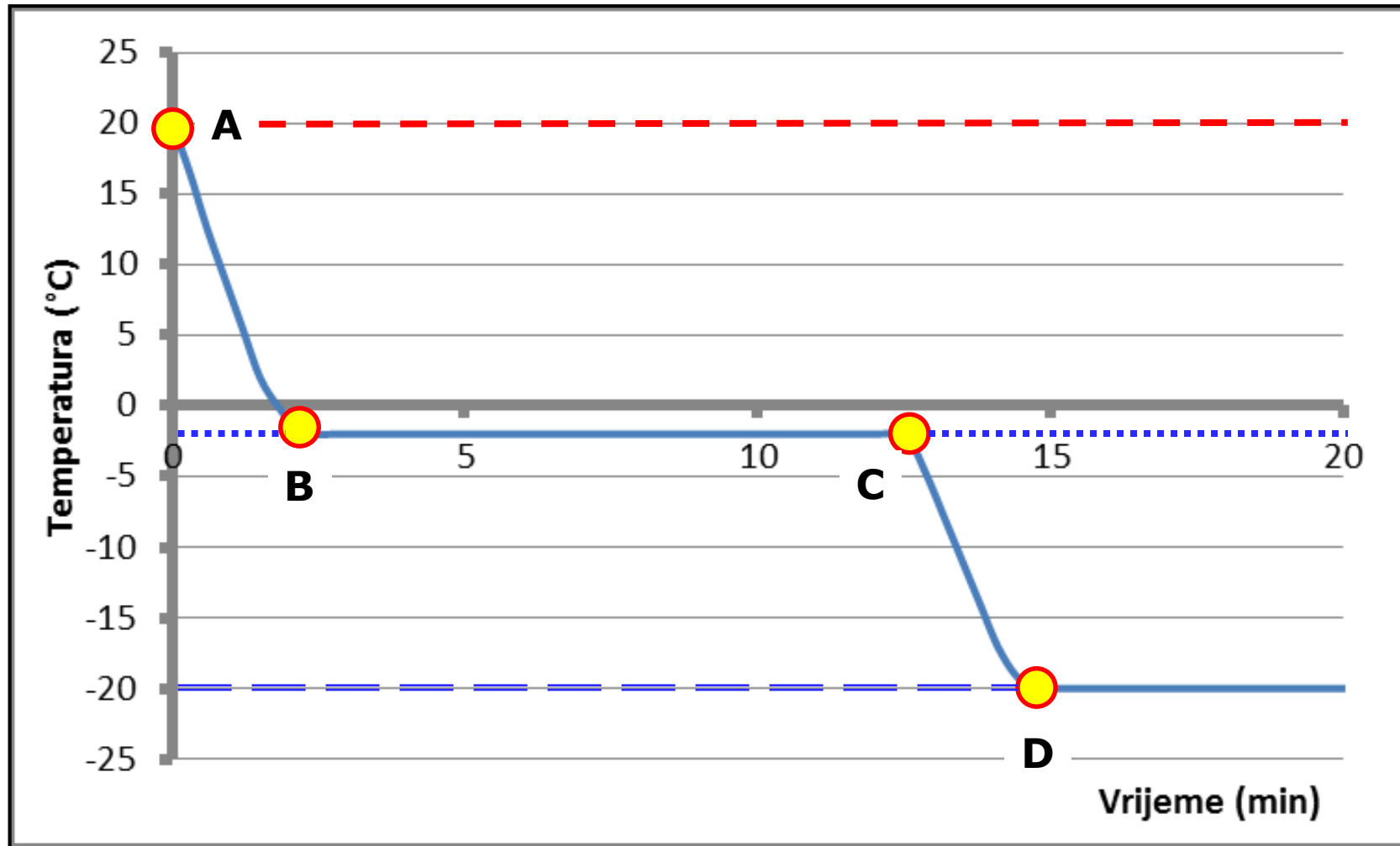
od početne temperature do temperature na kojoj voda u proizvodu prelazi u led,

- **u drugoj fazi pomiče se granica leda i vode** prema središtu materijala

(pretpostavka je da se temperatura proizvoda ne mijenja),

- **u trećoj fazi namirnica je zamrznuta,**

temperatura se snižava i asimptotski se približava temperaturi rashladnog zraka



(A-B) = period hlađenja namirnice do temperature smrzavanja

(B-C) = pomicanje granice smrznuto-nesmrznuto prema unutrašnjosti namirnice
(gotovo da nema promjene temperature)

(C-D) = pothlađivanje potpuno smrznute namirnice na temperaturu rashladnog zraka

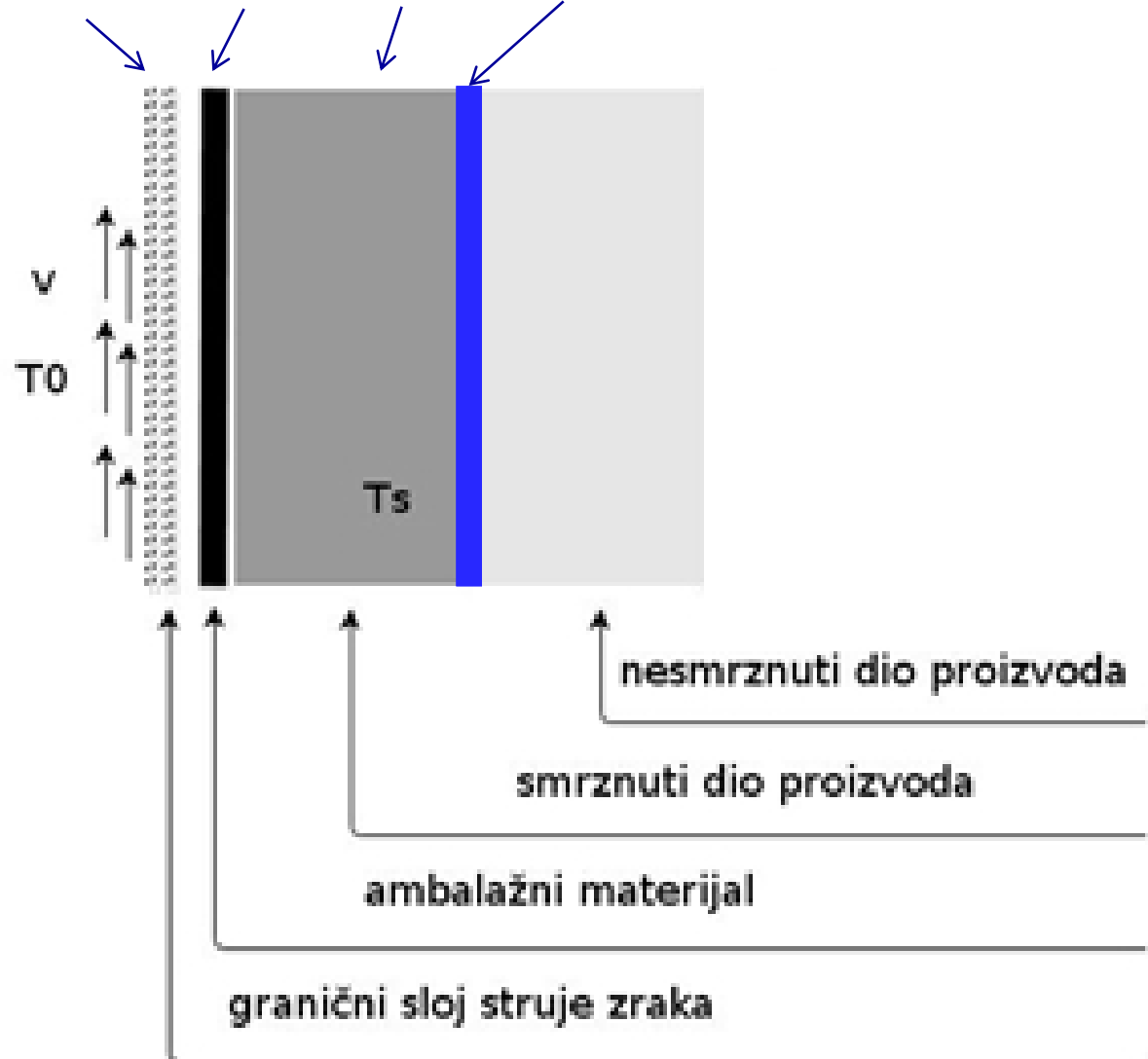
Osnove matematičkog modela zamrzavanja

Dinamika procesa određena je brzinom prijenosa topline

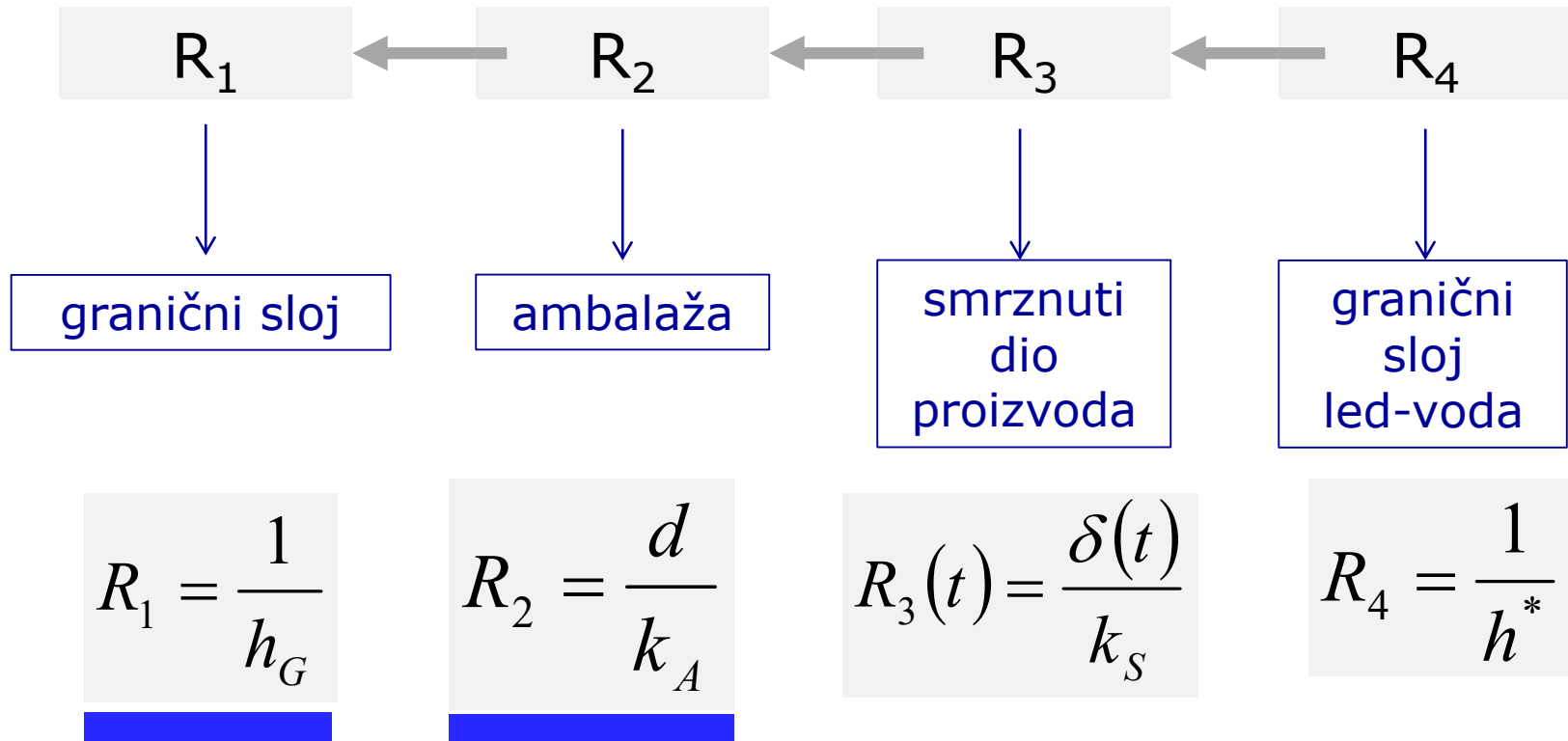
Brzina prijenosa topline je određena s četiri otpora:

- R_1 = otpor hidrodinamičkog graničnog sloja uz ambalažu
- R_2 = otpor ambalaže
- R_3 = otpor smrznutog dijela namirnice
- R_4 = otpor u graničnom sloju smrznuto-nesmrznuto
(*područje u kojemu voda kristalizira*)

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$$

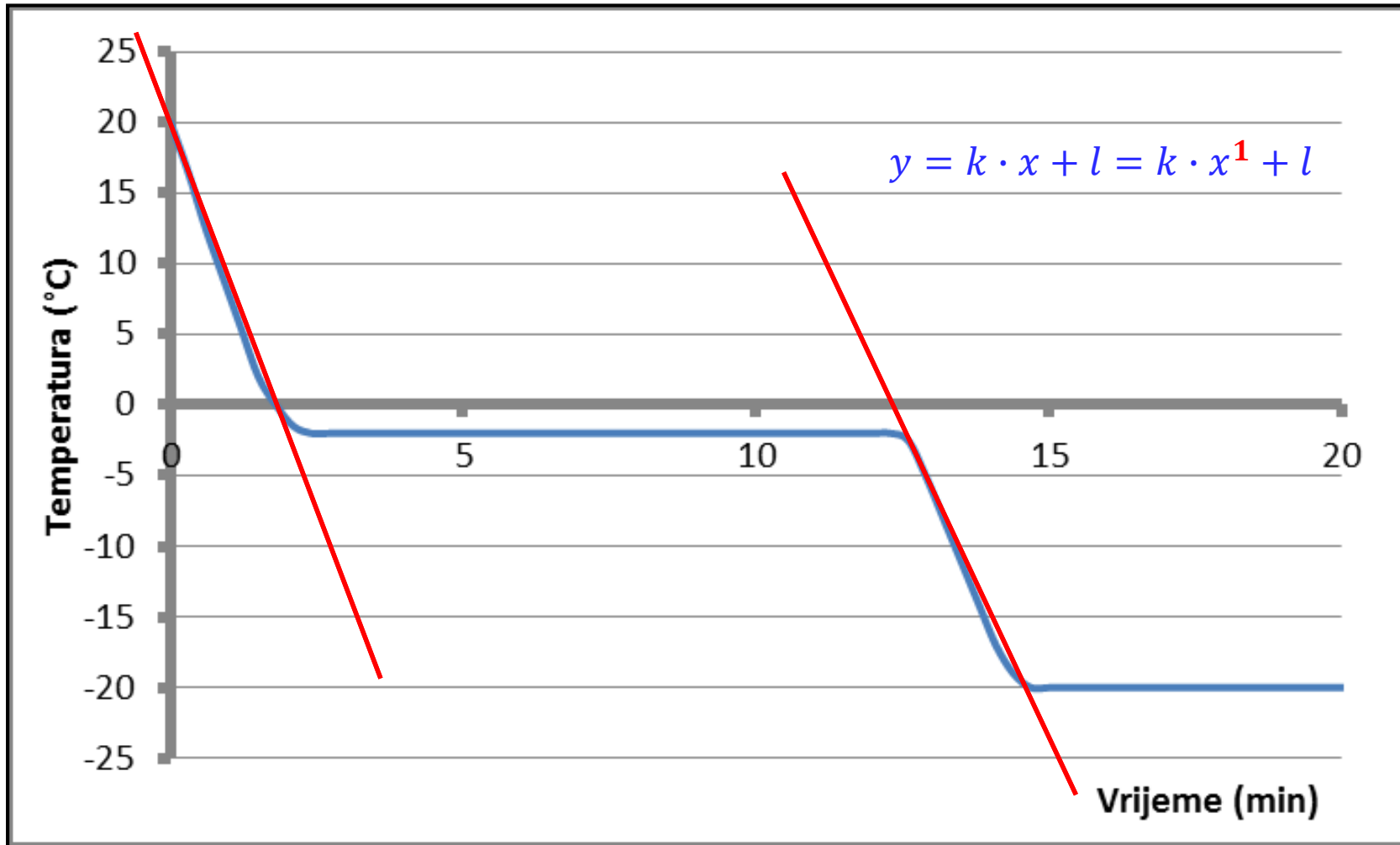


$$R = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$$



R1 i R2 možemo mijenjati u procesu

Prva i treća faza procesa modelirana je procesom prvog reda s usredotočenim parametrima.



- Prva i treća faza procesa modelirana je procesom prvog reda s usredotočenim parametrima.

- Jednadžba modela je:

toplina koja prolazi kroz ambalažu toplina koju namirnica prima

$$\left(\frac{1}{h_g} + \frac{d}{k_A} \right)^{-1} \cdot (T_0 - T) = \rho \cdot c_p \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{dT}{dt}$$

- Termofizički parametri odrede se posebno za proizvod u smrznutom i nesmrznutom stanju
- Brzina zamrzavanja je brzina pomicanja granice leda:

$$v_{\text{zamrzavanja}} = \frac{d}{dt} \delta(t)$$

- Vrijeme zamrzavanja proizvoda definirano je izrazom

$$\delta(t_{\text{zamrzavanja}}) = \frac{L}{2}$$

- proizvod se smrzava hladnim zrakom u području temperatura od 0 do $-50\text{ }^{\circ}\text{C}$

Postupak pri modeliranju

1. za odabranu temperaturu rashladnog zraka prvo se odrede vrijednosti fizičkih, toplinskih i transportnih parametara
2. za odabranu vrijednost brzine strujanja zraka i karakteristične dimenzije izračuna se Reynoldsov broj
3. ovisno o području strujanja odabere se korelacija za Nu broj
4. iz korelacije se zatim odredi koeficijent prijenosa h_G
5. otpor prijenosu topline kroz ambalažu R_A odredi se na osnovu odabranog materijala i njegove debljine

6. toplinska svojstva prehrambenog proizvoda odrede se iz pojednostavljenog modela

proizvod se sastoji od dvije komponente:

suhe tvari i vode

- za **suhu tvar** se **pretpostavi (!)** da ima **konstantnu specifičnu toplinu, gustoću i toplinsku vodljivost**
- za **vodu** se uzimaju vrijednosti u **tekućem i zaleđenom stanju**

Svrha modela:

odrediti brzinu i vrijeme zamrzavanja

Najčešće se piše na slijedeći način [1]:

$$Re = \frac{\text{Dinamički pritisak}}{\text{Smičući napon}} = \frac{\rho v_s^2 / L}{\mu v_s / L^2} = \frac{\rho v_s L}{\mu} = \frac{v_s L}{\nu} = \frac{\text{Inercijalne sile}}{\text{Viskozne sile}}$$

gdje je:

ρ je gustoća fluida u kgm^{-3}

v_s brzina fluida u ms^{-1}

L karakteristična dužina m

μ je (apsolutna) viskoznost fluida Nsm^{-2} ili $\text{Pa}\cdot\text{s}$

ν je kinematička viskoznost fluida, definirana kao $\nu = \mu/\rho$, u m^2s^{-1}

[1] Izvor: http://bs.wikipedia.org/wiki/Reynoldsov_broj

U prijenosu topline na granici (površini) unutar fluida, **Nusseltov broj** je bezdimenzionalni broj koji predstavlja omjer konvekcijskog i kondukcijskog prijenosa topline preko te granice (okomito na tu granicu).

Nusseltov broj blizu ravnoteže, prvenstveno konvekcije i kondukcije manjih intenziteta, karakteristika je laminarnog strujanja.

Veći Nusseltov broj odgovara aktivnijoj konvekciji, sa turbulentnim strujanjem, najčešće u rangu od 100 do 1000. [1]

Konvekcijska i kondukcijska strujanja topline su paralelna jedna s drugim, kao i s površinskom normalom/okomicom granične površine, a svi su okomiti na srednje strujanje fluida u jednostavnom slučaju.

$$Nu_L = \frac{hL}{k_f} = \frac{\textit{konvekcijski prijenos topline}}{\textit{kondukcijski prijenos topline}}$$

gdje je:

h - konvekcijski koeficijent prijenosa topline

L - karakteristična dužina

k_f - toplinska vodljivost fluida

[1] Izvor: http://bs.wikipedia.org/wiki/Nusseltovov_broj

Bilanca topline

- **pretpostavka** o "kvazistacionarnosti" procesa (*prividno stacionarno stanje*)
- neprekidno se mijenja debljina smrznutog sloja
- brzina smrzavanja = brzina prijenosa topline
toplina koju namirnica prima **toplina koja prolazi kroz ambalažu**

$$H_L \cdot x \cdot S \cdot \frac{d\delta(t)}{dt} = h(t) \cdot S \cdot (T_s - T_0)$$

H_L - latentna topline smrzavanja (npr. od +20 °C do 0 °C) ($H_L = 335 \text{ kJ kg}^{-1}$)

Latentna topline je količina topline potrebna za zagrijavanje 1 kg vode od 0 °C do 100 °C.

Ista količina topline potrebna je i za smrzavanje.

$$Q = 1 \text{ (kg)} \cdot 4190 \text{ (J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}) \cdot 100 \text{ °C} = 4,19 \cdot 10^5 \text{ (J)} = 419 \text{ (kJ)}$$

(Voda se u namirnicama nalazi najčešće na dnevnoj temperaturi, koja je bliže temperaturi 0 °C nego 100 °C. Zato je potrebno dovesti više topline za isparavanje nego za smrzavanje vode.)

Parametri modela

- ukupni koeficijent prijelaza topline s namirnice na hladni zrak (h):

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{h_G} + \frac{d_A}{k_A} + \frac{\delta(t)}{k_S} + \frac{1}{h^*} = R$$

- toplinska vodljivost namirnice tijekom zamrzavanja (k):

*udio vode
u namirnici*

$$k_{\text{nesmrznutog}} = k_{\text{suhe tvari}} \cdot (1-x) + k_{\text{H}_2\text{O}} \cdot x$$

suha tvar + **voda**

$$k_{\text{smrznutog}} = k_{\text{suhe tvari}} \cdot (1-x) + k_{\text{leda}} \cdot x$$

suha tvar + **led**

$$\rho_{\text{smrznutog}} = \rho_{\text{suhe tvari}} + \rho_{\text{leda}}$$

- koeficijent toplinske vodljivosti vode je $0,588 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
- koeficijent toplinske vodljivosti leda se izračuna prema formuli

$$k_{\text{leda}} \left(\frac{\text{W}}{\text{m K}} \right) = 2,21 - 0,0114 \cdot t_s(^{\circ}\text{C})$$

- t_s je temperatura na kojoj proizvod zamrzava

Dinamička bilanca

- dinamika procesa zamrzavanja je određena diferencijalnom jednačinom koja se izvede iz bilance toplote kada se upotrijebi limes bilance za $\Delta t \rightarrow dt$ i $\Delta \delta \rightarrow d\delta$

$$\left(\frac{T_s - T_0}{\rho \cdot x \cdot H_L} \right) = \left(\frac{1}{h_G} + \frac{d_A}{k_A} + \frac{\delta(t)}{k_S} + \frac{1}{h^*} \right) \cdot \frac{d\delta(t)}{dt}$$

početni uvjet: $t = 0$; $\delta_{t=0} = 0$

Na početku procesa nema leda u namirnici.

- nakon separacije varijabli integriramo lijevu i desnu stranu

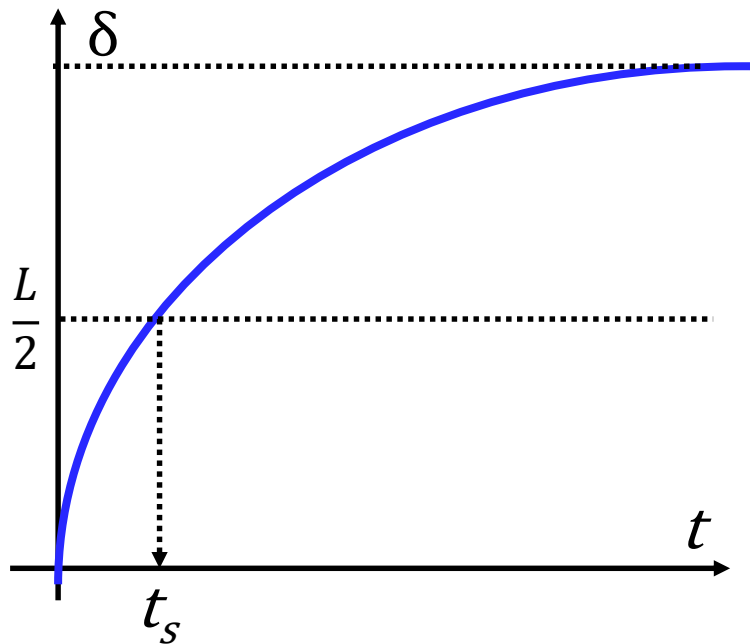
$$\int_0^t \left(\frac{T_s - T_0}{\rho \cdot x \cdot H_L} \right) \cdot dt = \int_0^{\delta(t)} \left(\frac{1}{h_G} + \frac{d_A}{k_A} + \frac{\delta(t)}{k_S} + \frac{1}{h^*} \right) \cdot d\delta$$

$$\int_0^t \left(\frac{T_s - T_0}{\rho \cdot x \cdot H_L} \right) \cdot dt = \int_0^{\delta(t)} \left(\frac{1}{h_G} + \frac{d_A}{k_A} + \frac{\delta(t)}{k_S} + \frac{1}{h^*} \right) \cdot d\delta$$

- integriramo svaki član zasebno:

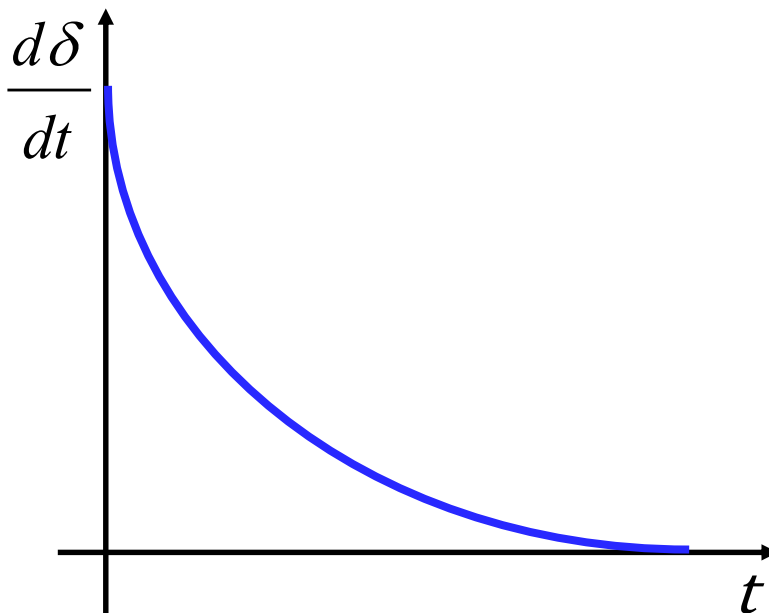
$$\frac{T_s - T_0}{\rho \cdot x \cdot H_L} \cdot t = \left(\frac{1}{h_G} + \frac{d_A}{k_A} + \frac{1}{h^*} \right) \cdot \delta + \frac{1}{2 \cdot k_S} \cdot \delta^2$$

Rješenje diferencijalne jednačbe



vrijeme zamrzavanja

$$\delta(t_{\text{zamrzavanja}}) = \frac{L}{2}$$



brzina zamrzavanja

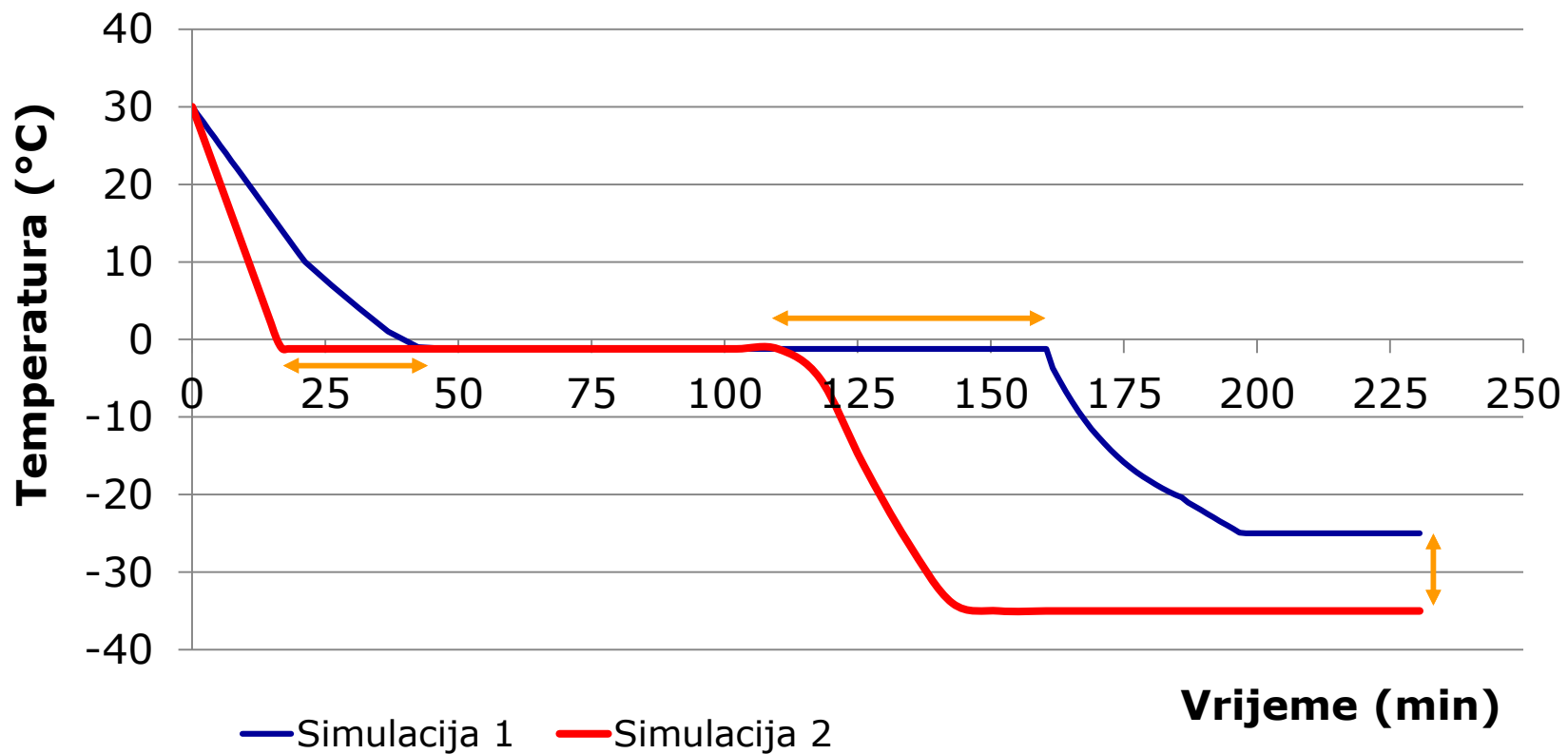
$$v_{\text{zamrzavanja}} = \frac{d}{dt} \delta(t)$$

U početku se brzo pomiče granica smrznuto-nesmrznuto, a kasnije je sve deblji sloj leda i granica se pomiče sve sporije.

Primjer: model i simulacija procesa zamrzavanja

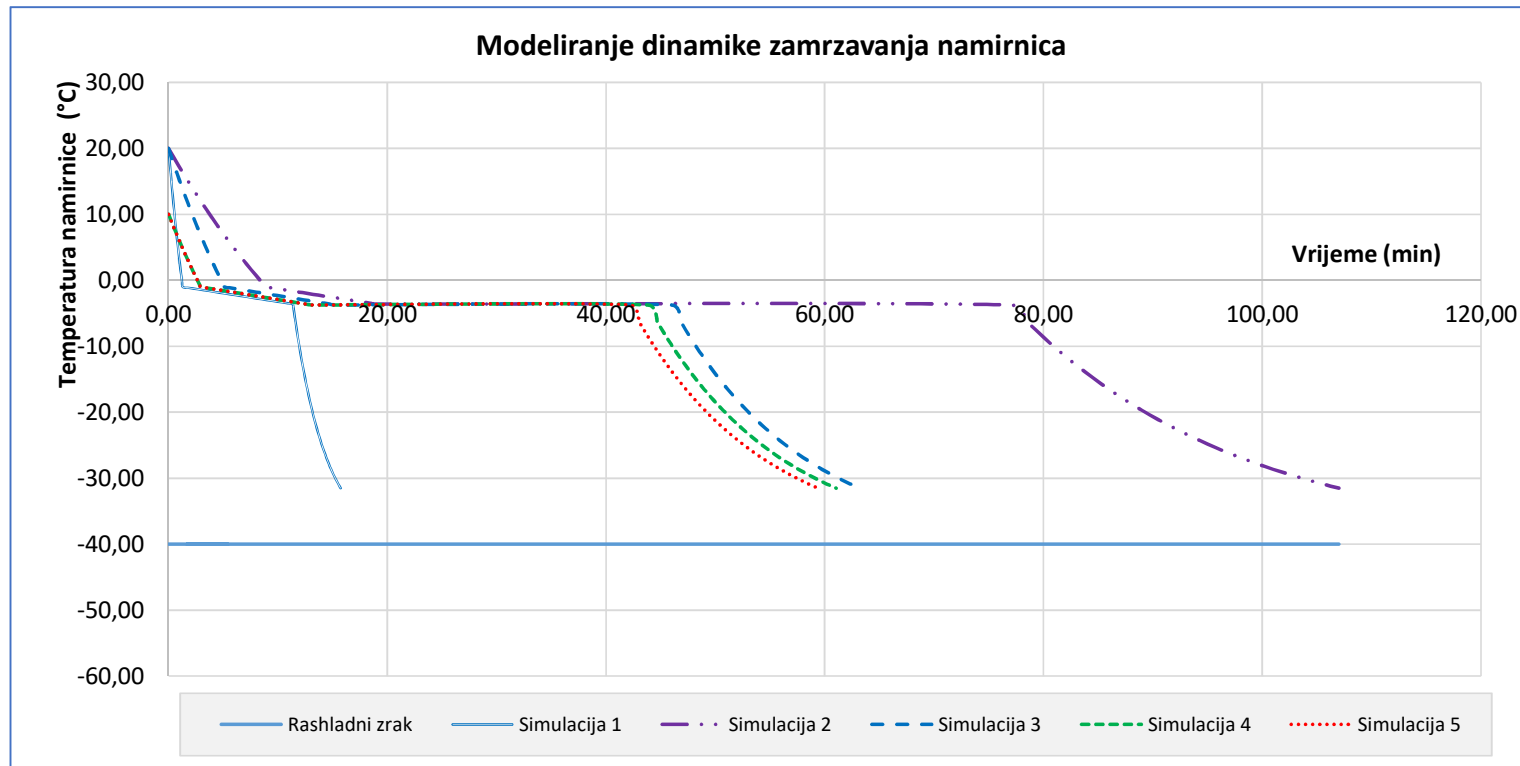
- simulacijskim programom određuju se brzina i vrijeme zamrzavanja za slijedeće odabrane parametre:
 - vrstu **proizvoda**,
 - dimenzije, vrstu i debljinu **ambalaže** i
 - brzinu i temperaturu **rashladnog medija** (zraka).

Dinamika smrzavanja teletine



Objasnite moguće uzroke razlika između rezultata simulacije 1 i 2

Modeliranje dinamike zamrzavanja namirnica		Simulacija 1	Simulacija 2	Simulacija 3	Simulacija 4	Simulacija 5
Vrsta namirnice		Meso, teleće	Meso, teleće	Meso, teleće	Meso, teleće	Meso, teleće
PODACI ZA AMBALAŽU:						
Vrsta ambalažnog materijala		papir	papir	papir	papir	papir
Dimenzije paketa namirnice	Visina (cm)	10	50	50	50	50
	Širina (cm)	1	5	5	5	5
	Debljina (cm)	0,2	0,2	0,2	0,2	0,1
Koeficijent toplinske vodljivosti ambalaže	k ($W\ m^{-1}K^{-1}$)	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14
SVOJSTVA RASHLADNOG ZRAKA						
Namirnica se smrzava zrakom temperature	T_0 ($^{\circ}C$)	-40	-40	-40	-40	-40
Brzina zraka za hlađenje	v ($m\ s^{-1}$)	10	10	20	20	20
SVOJSTVA NAMIRNICE						
Temperatura namirnice u paketu	T ($^{\circ}C$)	20	20	20	10	10
Temperatura na kojoj se namirnica smrzava	T_s ($^{\circ}C$)	-1	-1	-1	-1	-1
Koeficijent toplinske vodljivosti namirnice u nesmrzutom stanju	k ($W\ m^{-1}K^{-1}$)	2948	2948	2948	2948	2948
Gustoća namirnice u nesmrzutom stanju	ρ_n ($kg\ m^{-3}$)	1100	1100	1100	1100	1100
Gustoća smrznute namirnice	ρ_s ($kg\ m^{-3}$)	1031	1031	1031	1031	1031
Specifična toplina nesmrznute namirnice	c_p ($J\ kg^{-1}$)	1675	1675	1675	1675	1675
Specifična toplina smrznute namirnice	c_p ($J\ kg^{-1}$)	1264	1264,03	1264,03	1264,03	1264,03
Maseni udio vode u namirnici	x	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63
Izračunate vrijednosti bezdimenzionih veličina u modelu						
Reynoldsov broj	$Re =$	100335	501677	1003354	1003354	1003354
Prandtlov broj	$Pr =$	0,717823	0,717823	0,717823	0,717823	0,717823
Nusseltov broj	$Nu =$	242	878	1529	1529	1529
Izračunate vrijednosti otpora prijenosu topline, za ulazne podatke						
granični sloj ambalaža	($m\ K\ W^{-1}$)	0,019494	0,026897	0,015448	0,015448	0,015448
na granici smrznuto-nesmrznuto	($m\ K\ W^{-1}$)	0,000333	0,000333	0,000333	0,000333	0,000333
led debljine 10 cm na $-20\ ^{\circ}C$	($m\ K\ W^{-1}$)	0,040950	0,040950	0,040950	0,040950	0,040950
Vrijeme hlađenja namirnice do temperature smrzavanja (A \rightarrow B)	(min)	1,29	8,90	5,11	2,95	2,95
Vrijeme potrebno za potpuno smrzavanje namirnice (B \rightarrow C)	(min)	11,17	75,51	45,12	42,95	41,29
Vrijeme hlađenja namirnice do temperature rashladnog zraka (C \rightarrow D)	(min)	15,73	107,00	63,20	61,04	59,38





3. Modeli dinamičkih stanja sustava

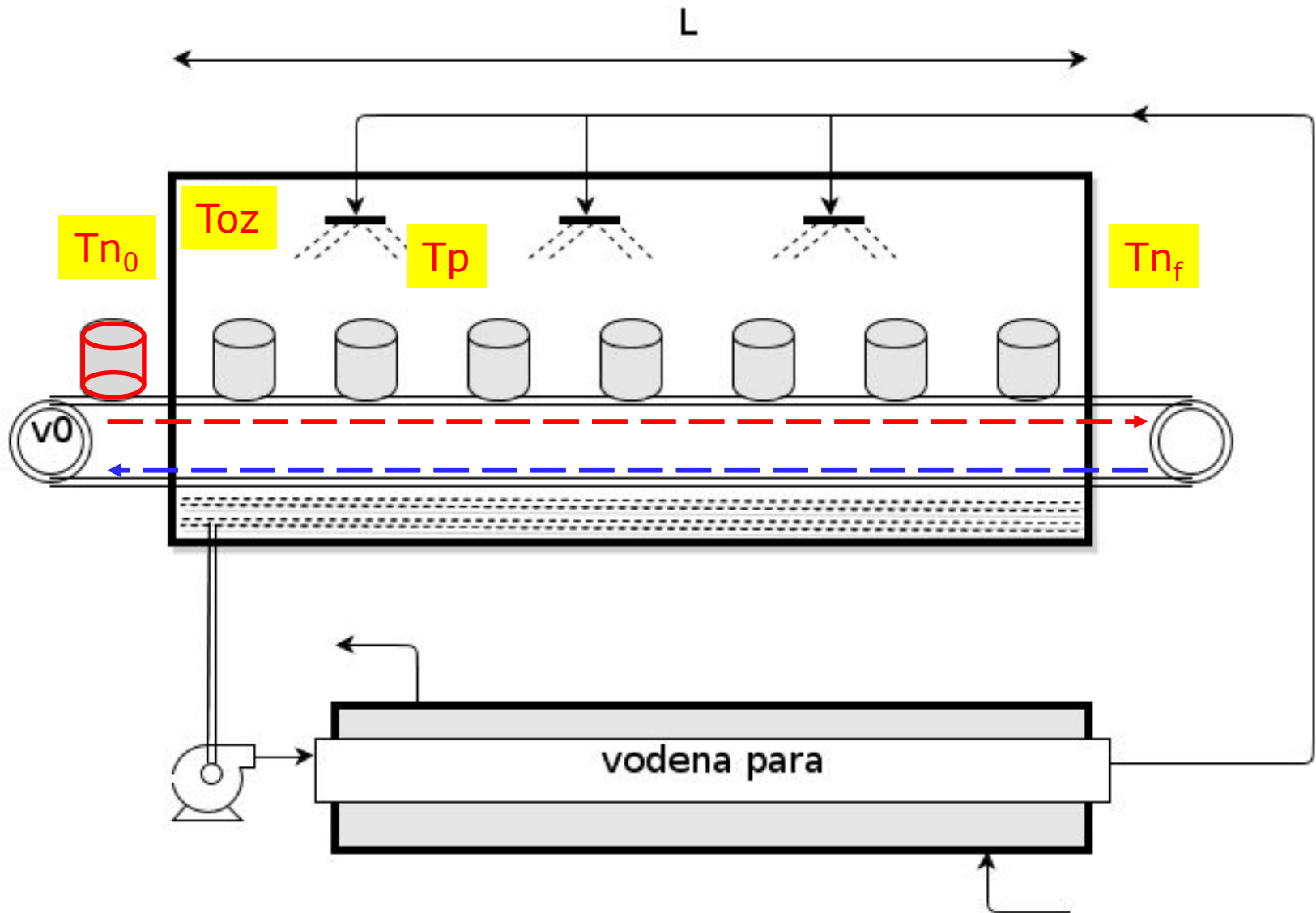
Model smrzavanja namirnica

Eulerova metoda za rješavanje običnih
diferencijalnih jednažbi

Model sterilizacije namirnica

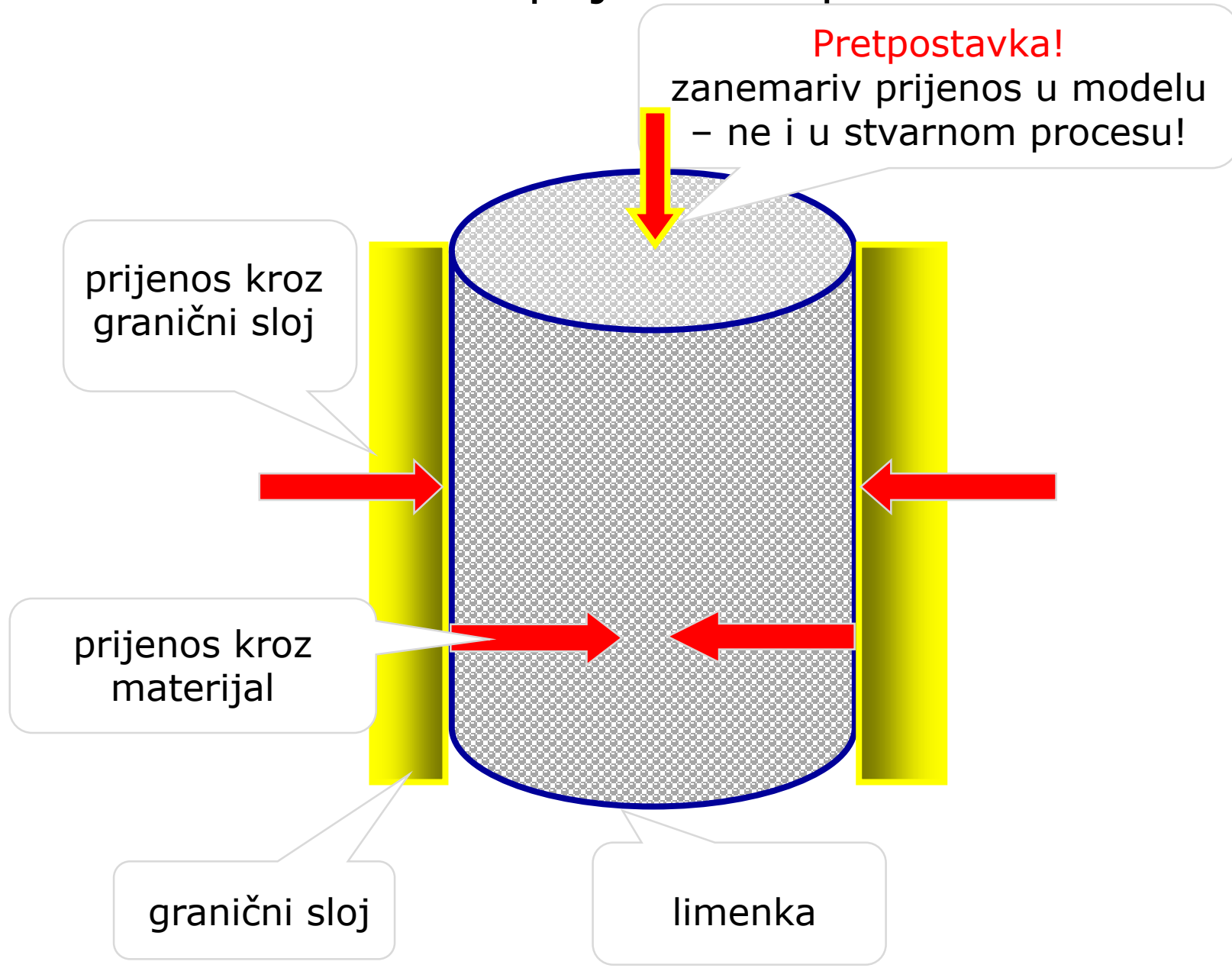
Model upravljanja biokemijskim reaktorom

Shematski prikaz tunelskog sterilizatora

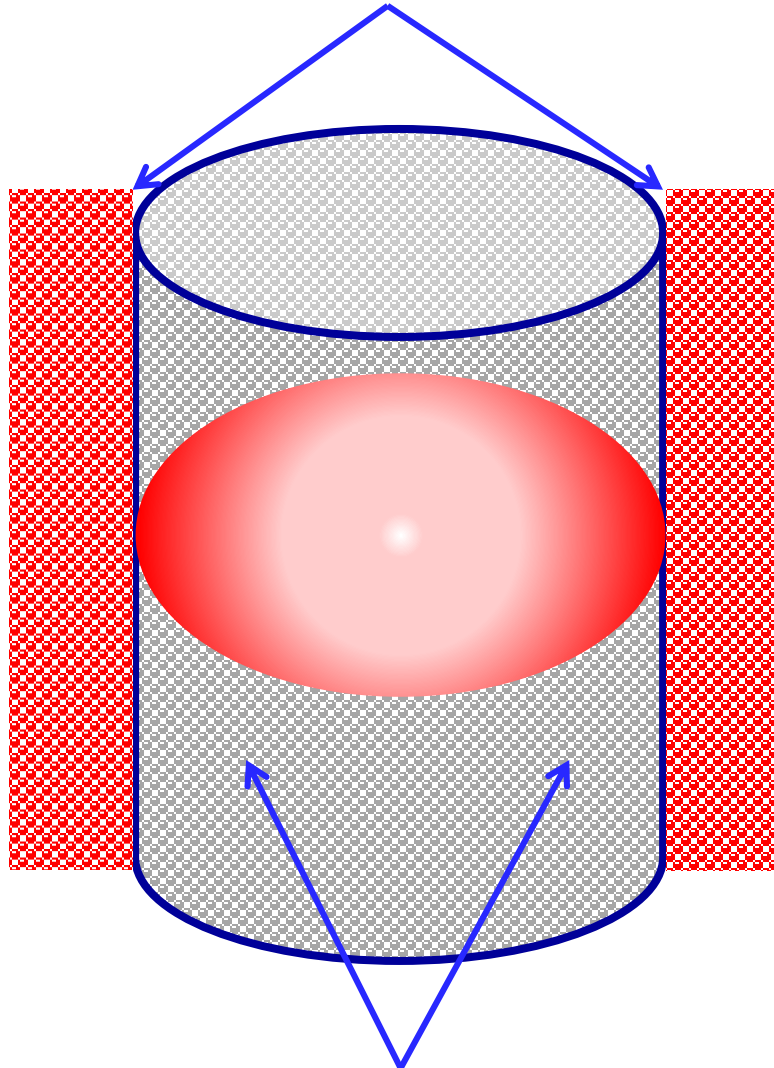


- vrijeme simulacije procesa je:

Mehanizmi prijenosa topline



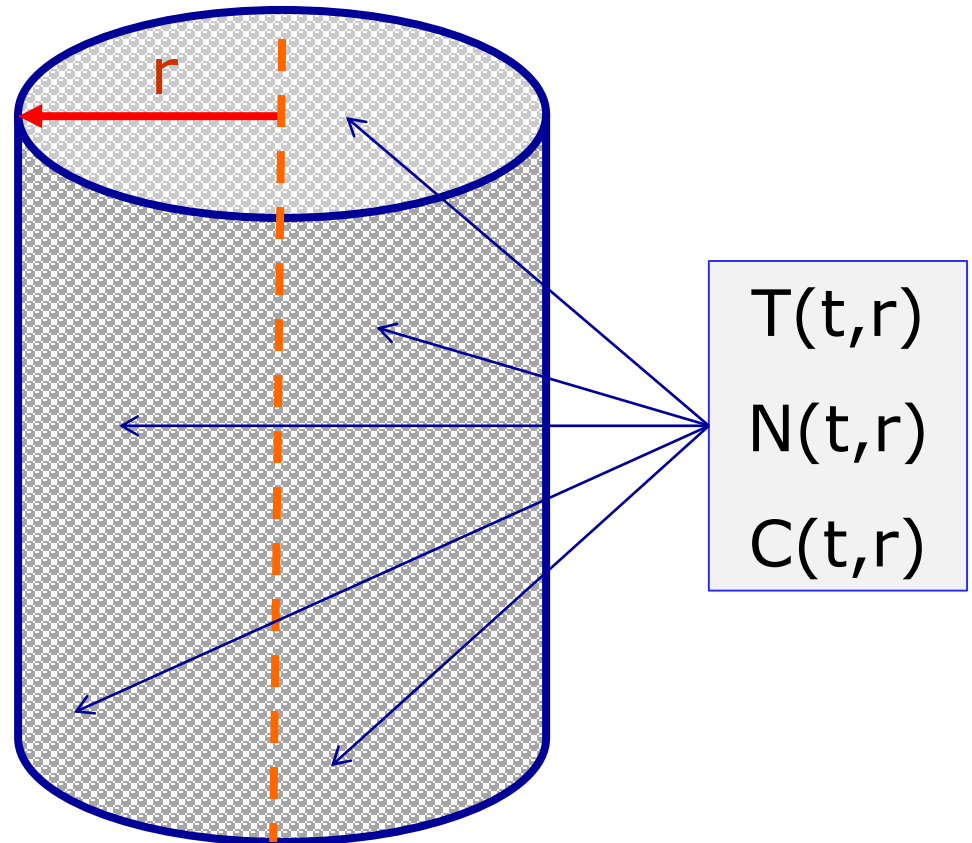
granični sloj:
prijenos topline u procesu ukapljivanja vodene pare



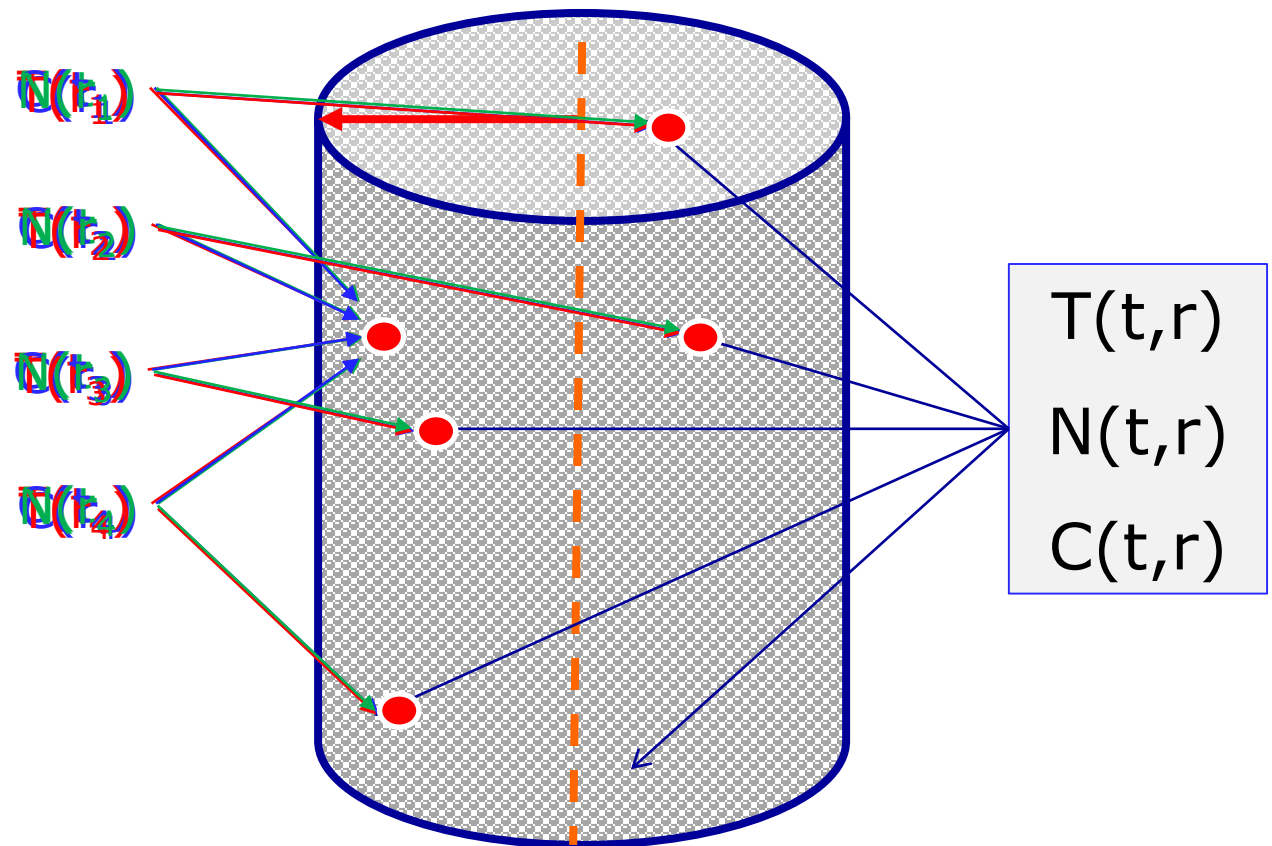
u namirnici:
prijenos topline kondukcijom

Veličine stanja

(opisuju stanje namirnice)



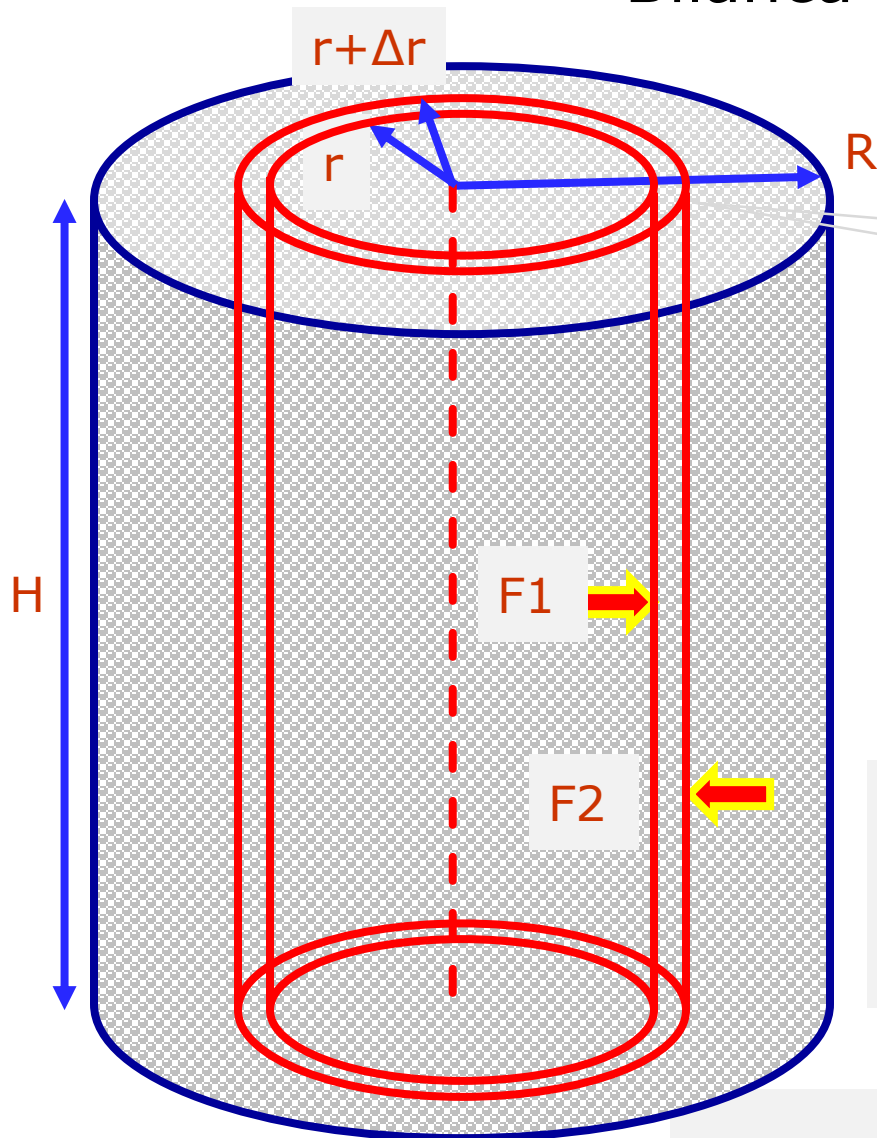
matematički model
s raspodijeljenim (distribuiranim) veličinama stanja



matematički model
s raspodijeljenim (distribuiranim) veličinama stanja

Bilanca topline

Matematički modeli toplinskih procesa temelje se na bilancama topline.



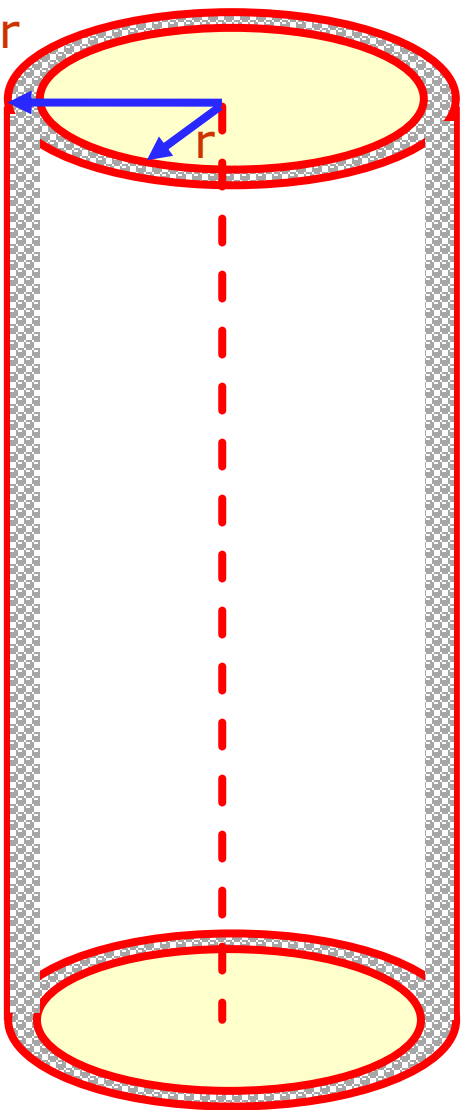
isječak valjka ΔV

$$\Delta V = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \Delta r \cdot H$$

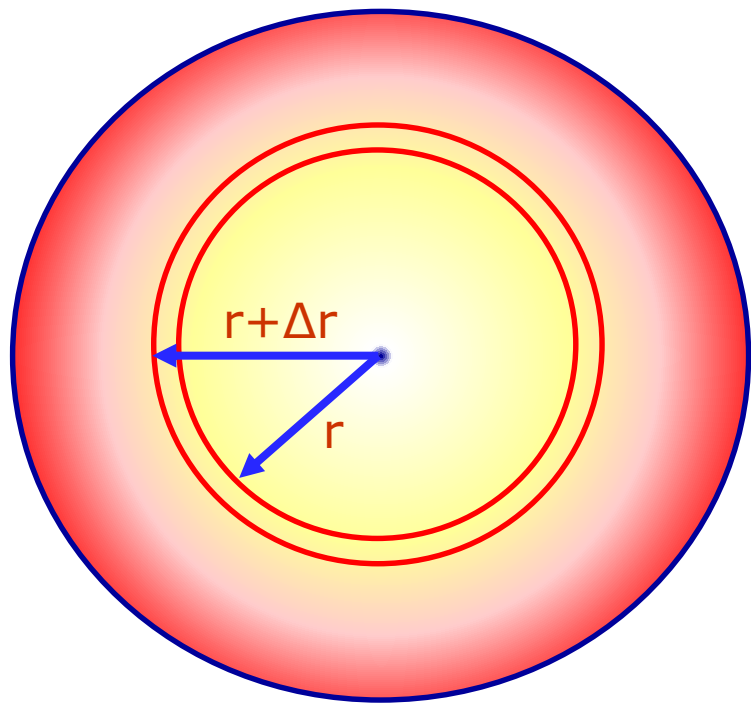
$$F_1 = -2 \cdot r \cdot \pi \cdot H \cdot k \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_r$$

$$F_2 = -2 \cdot (r + \Delta r) \cdot \pi \cdot H \cdot k \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r + \Delta r}$$

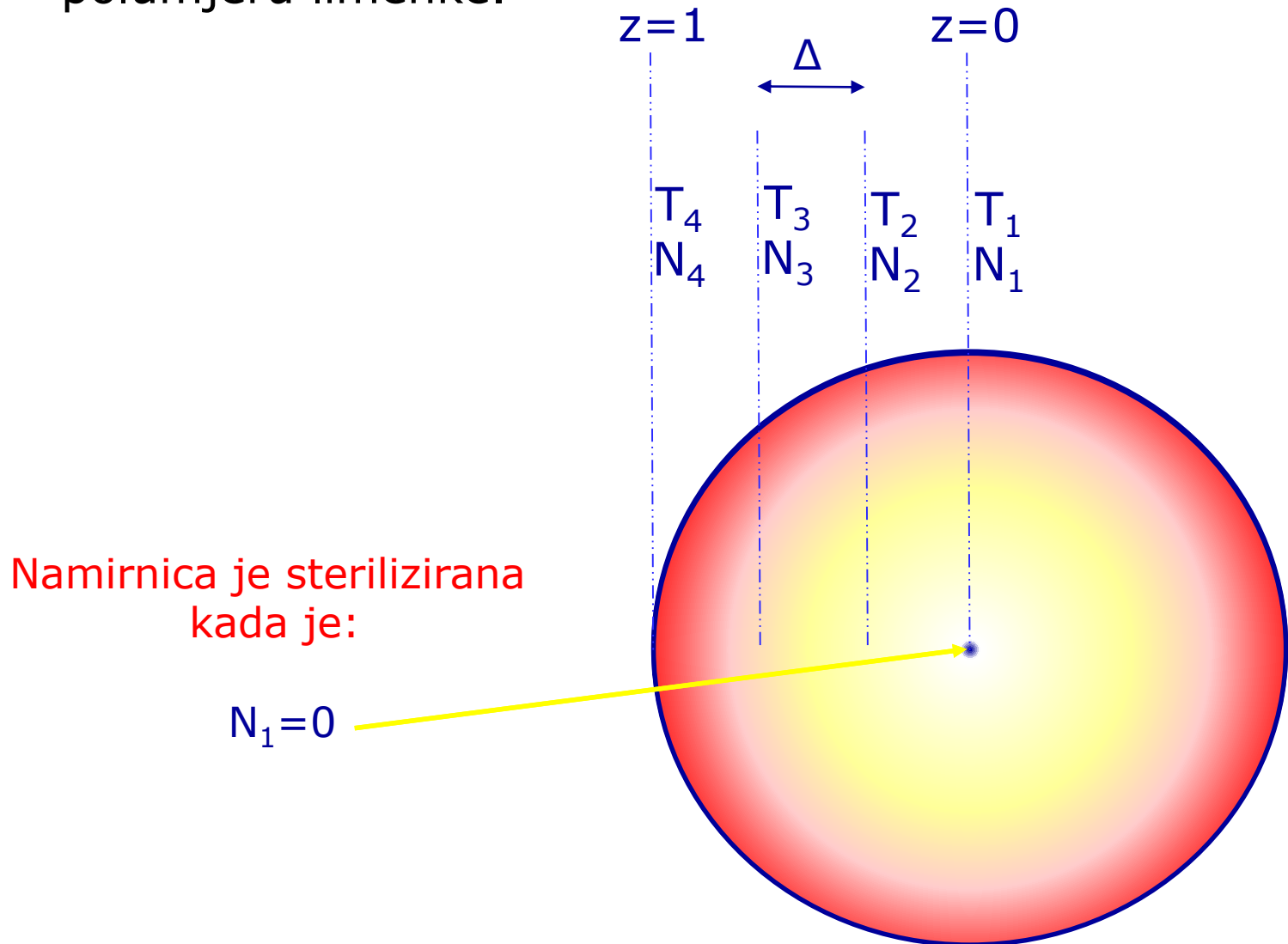
$r + \Delta r$



isječak valjka ΔV



- Da bi se razvio i koristio model, potrebno je mjeriti/izračunavati temperature na četiri pozicije na polumjeru limenke.



Jednadžba bilance topline

brzina promjene akumulacije = ulazni tok - izlazni tok

$$\frac{\Delta}{\Delta t} (2 \cdot \pi \cdot r \cdot \Delta r \cdot H \cdot \rho \cdot c_p \cdot T(r, t))$$

$$V \cdot \rho = m$$

$$2 \cdot \pi \cdot (r + \Delta r) \cdot H \cdot k \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r+\Delta r}$$

$$2 \cdot \pi \cdot r \cdot H \cdot k \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_r$$

uvrstimo izraze u bilancu

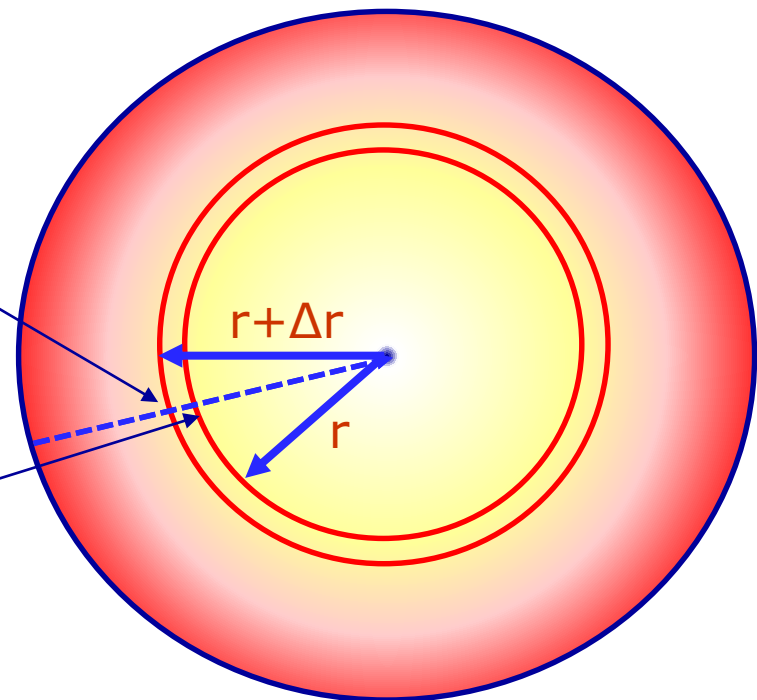
$$\frac{\Delta}{\Delta t} [2 \cdot r \cdot \pi \cdot H \cdot \Delta r \cdot \rho \cdot c_p \cdot T(r, t)] =$$

$$= -2 \cdot r \cdot \pi \cdot H \cdot k \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_r + 2 \cdot (r + \Delta r) \cdot \pi \cdot H \cdot k \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r+\Delta r}$$

Zašto „-“ i „+“ ???

Ovdje toplina dolazi u isječak

Ovdje toplina odlazi iz isječka



$$\frac{\Delta}{\Delta t} \left[\underline{2} \cdot \underline{r} \cdot \underline{\pi} \cdot \underline{H} \cdot \Delta r \cdot \rho \cdot c_p \cdot T(r, t) \right] =$$

$$= \underline{-2} \cdot \underline{r} \cdot \underline{\pi} \cdot \underline{H} \cdot k \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_r + \underline{2} \cdot (r + \Delta r) \cdot \underline{\pi} \cdot \underline{H} \cdot k \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r+\Delta r}$$

pokratimo s $2 \cdot \pi \cdot H$ i preuredimo u novi oblik:

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\Delta T(r, t)}{\Delta t} = k \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{(r + \Delta r) \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r+\Delta r} - r \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_r}{\Delta r}$$

primijenimo granični postupak:

$$\Delta t \rightarrow dt \quad \Delta r \rightarrow dr$$

dobije se parcijalna diferencijalna jednačba:

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = k \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

Bilanca broja mikroorganizama

- kinetika procesa uništenja mikroorganizama:

model procesa prvog reda

- veličina stanja: koncentracija/broj mikroorganizama $N(r, t)$

- kinetički model:

$$r = -k(T) \cdot N(r, t)^1$$

- zanemarivi su ulazni i izlazni tokovi mikroorganizama jer u tunnelnom sterilizatoru nema konvekcijskih struja u materijalu (ne postoji mogućnost transporta m-z iz okoline u namirnicu)

- jednačina bilance glasi:

$$\frac{\partial N(r, t)}{\partial t} = -k(T) \cdot N(r, t)^1$$

specifična brzina uništenja mikroorganizama pri temperaturi T

Model specifične brzine odumiranja mikroorganizama - $k(T)$

$$k(T) = \frac{\ln(10)}{D(T(r,t))} = \frac{2,302585}{D(T(r,t))}$$

$$D(T) = D_{ref} \cdot 10^{\frac{T_{ref} - T(r,t)}{z}}$$

D_{ref} = decimalno vrijeme redukcije
 T_{ref} = referentna temperatura

Model dinamike promjene koncentracije vitamina (npr. C ili B₆)

$$\frac{\partial c(r,t)}{\partial t} = -k_0 \cdot e^{-\frac{E}{R \cdot T(r,t)}} \cdot c(r,t)$$

2,718252

Bezdimenzijske značajke

bezdimenzijska udaljenost:

$$z = \frac{r}{R}$$

toplinska difuzivnost:

$$\alpha = \frac{k}{\rho \cdot c_p}$$

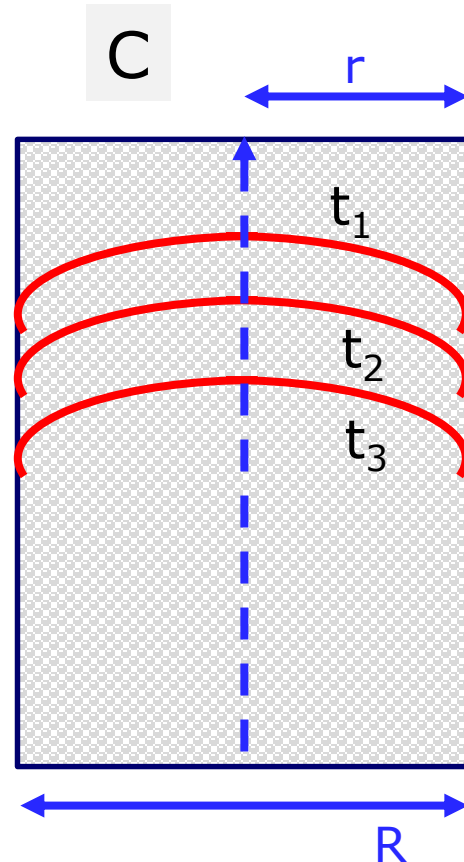
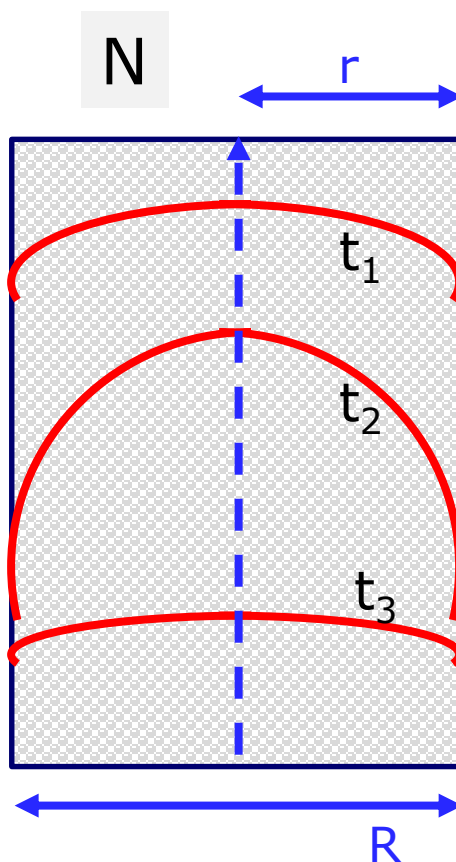
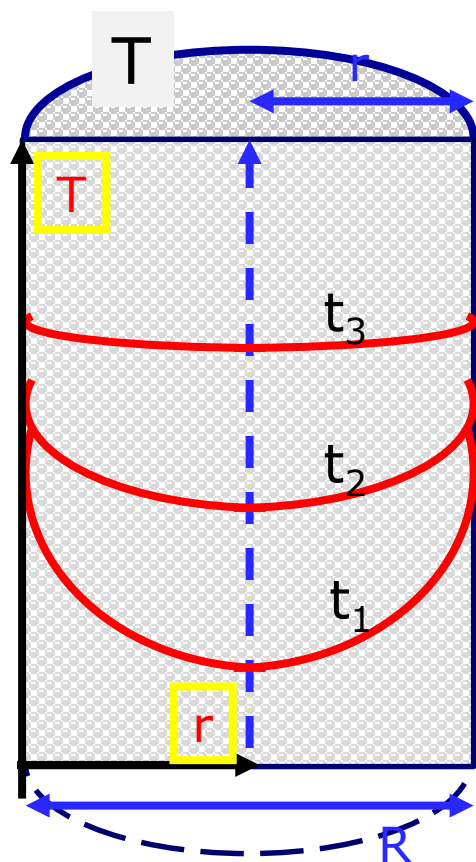
bezdimenzijsko vrijeme - Fourierova značajka:

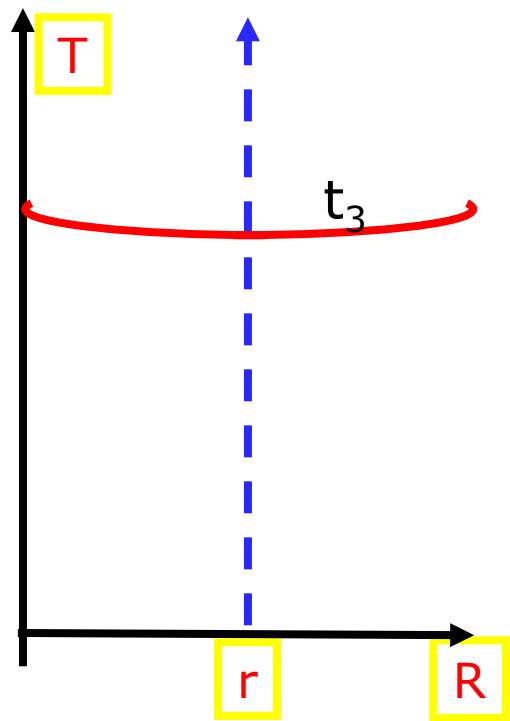
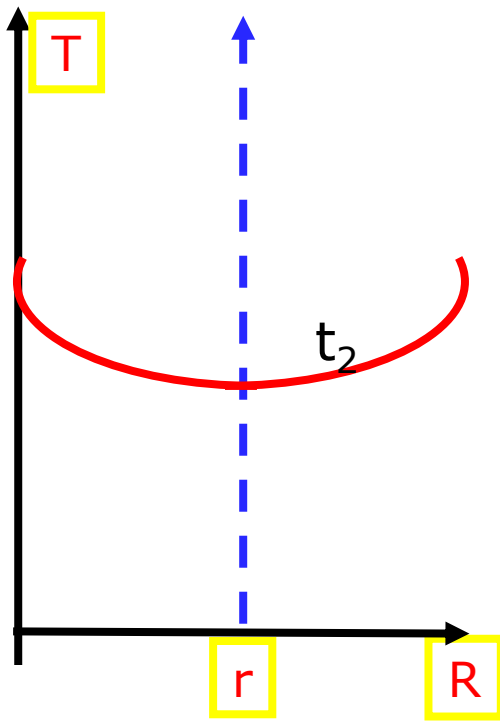
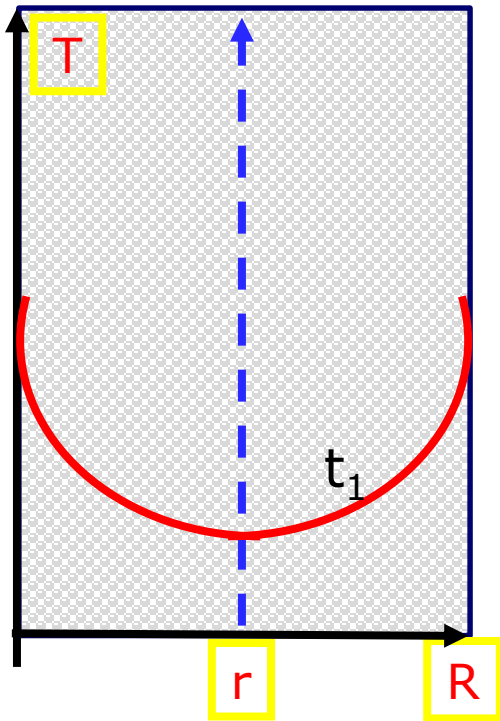
$$Fo = \frac{\alpha \cdot t}{R^2}$$

bezdimenzijska temperatura:

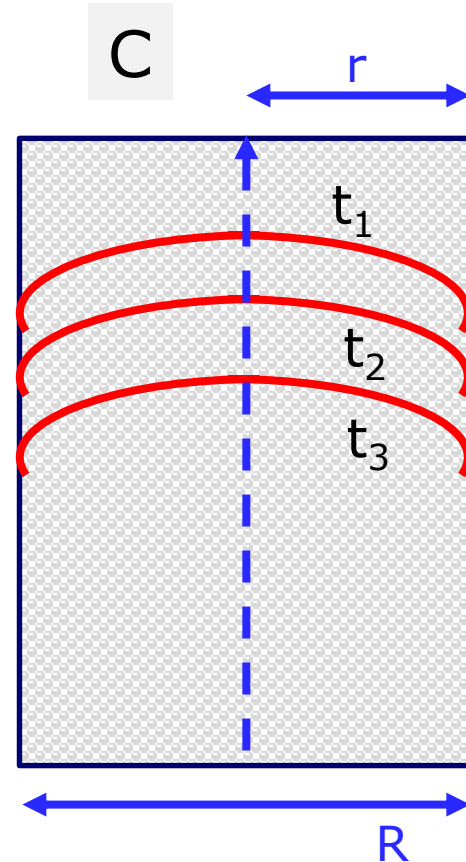
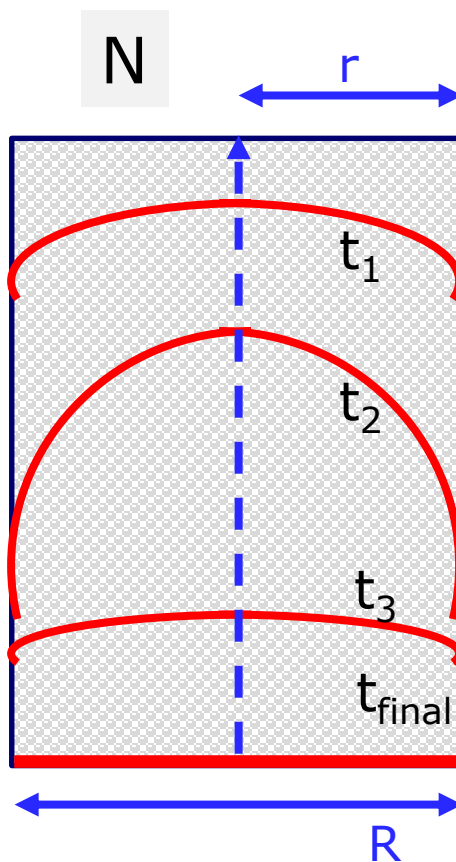
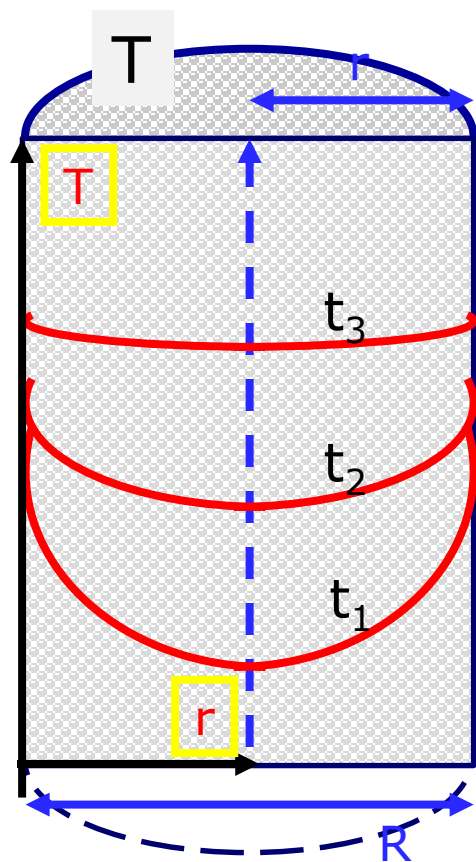
$$\theta = \frac{T}{T_r}$$

matematični model
s raspodijeljenim (distribuiranim) veličinama stanja





matematični model
s raspodijeljenim (distribuiranim) veličinama stanja



Diskretizacija distribuiranih modela

- u inženjerskim zadacima često je potrebno rješavati **obične i parcijalne diferencijalne jednačbe** da bismo odredili vrijednosti nepoznatih varijabli ili funkcija
- distribuirani modeli (parcijalne dif. jednačbe) **postaju rješivi tek nakon postupka diskretizacije bilanci** (jednačbi) po prostoru i vremenu
- **rezultat diskretizacije bilanci su algebarske jednačbe**
- numeričke metode se razlikuju po načinu diskretizacije prostora i po načinu kreiranja sustava algebarskih jednačbi

- kod stacionarnih stanja distribuiranih modela **jednadžbe se rješavaju za odabrani korak** (interval, pomak u prostoru)
- kod nestacionarnih stanja **provodi se diskretizacija po prostoru i po vremenu** pa koristimo i prostorni i vremenski interval (prostor se podijeli vodoravno i okomito, a računanje se obično vrši u čvorovima mreže nastale dijeljenjem prostora)
- **zbog numeričke diskretizacije** jednadžbi/bilanci, **rješenja** dinamičkih jednadžbi mogu biti **samo aproksimativna ili približno točna**, ali ne i apsolutno točna
- **kod diskretizacije modela najčešće se prostor podijeli na male cjeline** (npr. djeliće volumena = **diskretizacija prostora**)
- u ovim malim djelićima volumena **promjene smatramo linearnim**

- diskretizacija u distribuiranim modelima provodi se primjenom Euler-ove metode, Taylor-ovog reda, metode konačnih razlika, metode konačnih elemenata, metode linija (ortogonalnih kolokacija) ili dr.
- Eulerova metoda u praktičnoj primjeni daje rezultate s velikim pogreškama. Zato se u simulacijama često koriste točnije metode diskretizacije (npr. Runge-Kutta 2 i 4).
- rješenja dobivena numeričkim postupkom (izračunavanjem) razlikuju se od egzaktnih analitičkih rješenja
- **analitička rješenja (izmjerene vrijednosti) smatramo točnim (egzaktnim) vrijednostima**

- metoda konačnih razlika u parcijalnoj diferencijalnoj jednažbi zamjenjuje derivacije nizom aproksimacija
- aproksimacija prve derivacije:

$$f(x + \Delta x) \cong f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$$

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}$$

jednostrana (s desne strane)
aproksimacija prve derivacije

- aproksimacija druge derivacije:

$$f(x \oplus \Delta x) \cong f(x) + f'(x) \cdot \Delta x + \frac{1}{2} \cdot f''(x) \cdot \Delta x^2$$

$$f(x \ominus \Delta x) \cong f(x) - f'(x) \cdot \Delta x + \frac{1}{2} \cdot f''(x) \cdot \Delta x^2$$

Zbrojimo oba izraza

$$f(x + \Delta x) + f(x - \Delta x) \cong 2 \cdot f(x) + f''(x) \cdot \Delta x^2$$

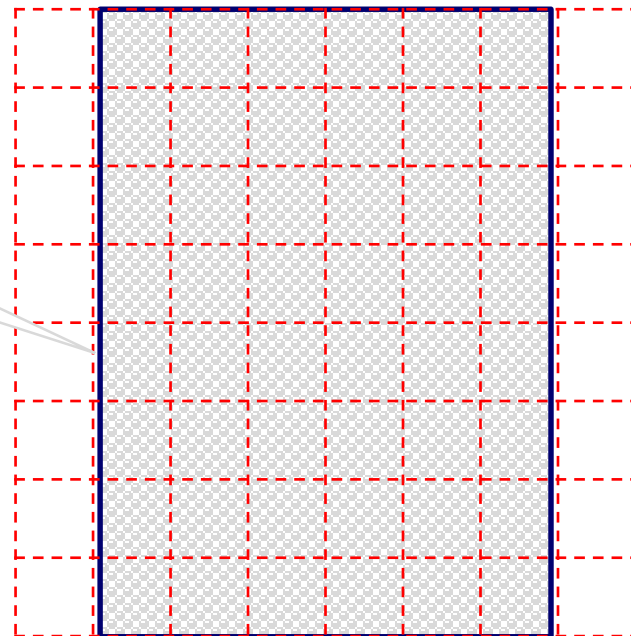
Izračunamo drugu derivaciju

$$f''(x) = \frac{f(x + \Delta x) - 2 \cdot f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2}$$

$$f''_i = \frac{f_{i+1} - 2 \cdot f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2}$$

- prvi korak u diskretizaciji je podjela modeliranog prostora pravilnom mrežom na niz podpodručja
- razmaci mreže u x (Δx) i y (Δy) smjeru mogu varirati
- da bi jednadžbe bile jednostavnije u primjerima pretpostavljamo da je mreža ekvidistantna ($\Delta x = \Delta y \rightarrow$ jednaka je skala razmaka po x i y osi)

limenka



- da bi se mogao napisati sustav jednažbi za sve čvorove u mreži potrebno je provesti numeraciju koja se može provesti na dva načina:
 - po redovima i kolonama (kao u MS Excel tablici) ili
 - numeracija svih čvorova u mreži od prvog do posljednjeg

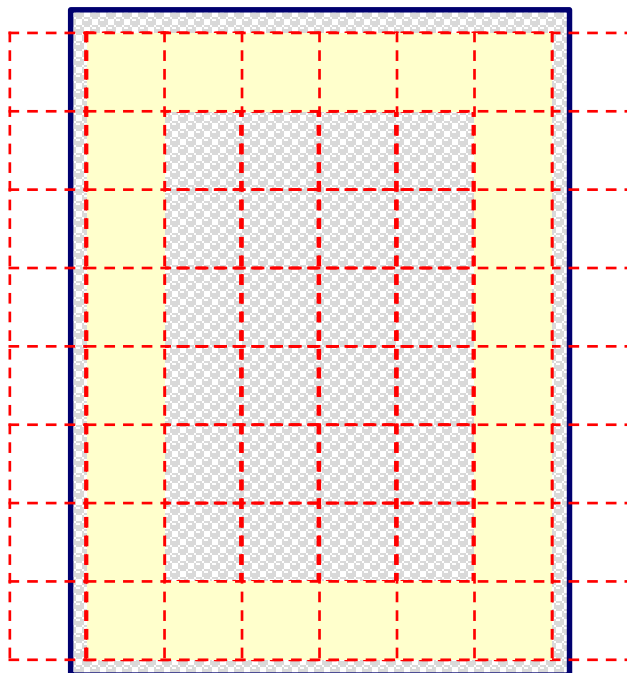
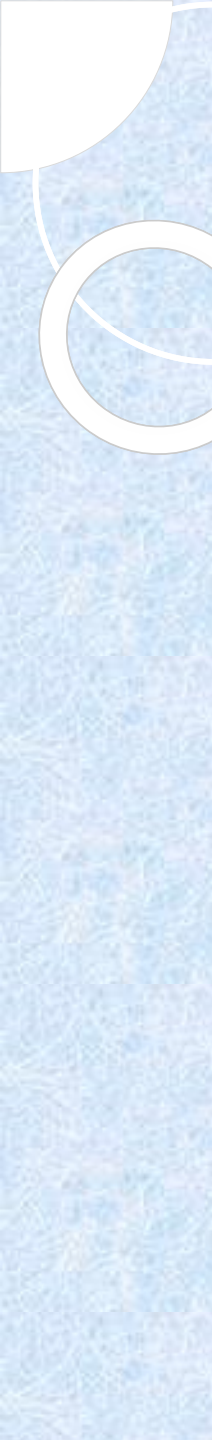
11	12	13
21	22	23
31	32	33

1	2	3
4	5	6
7	8	9

- čvorovi koji predstavljaju rub modeliranog područja zahtijevaju informacije o rubnim uvjetima

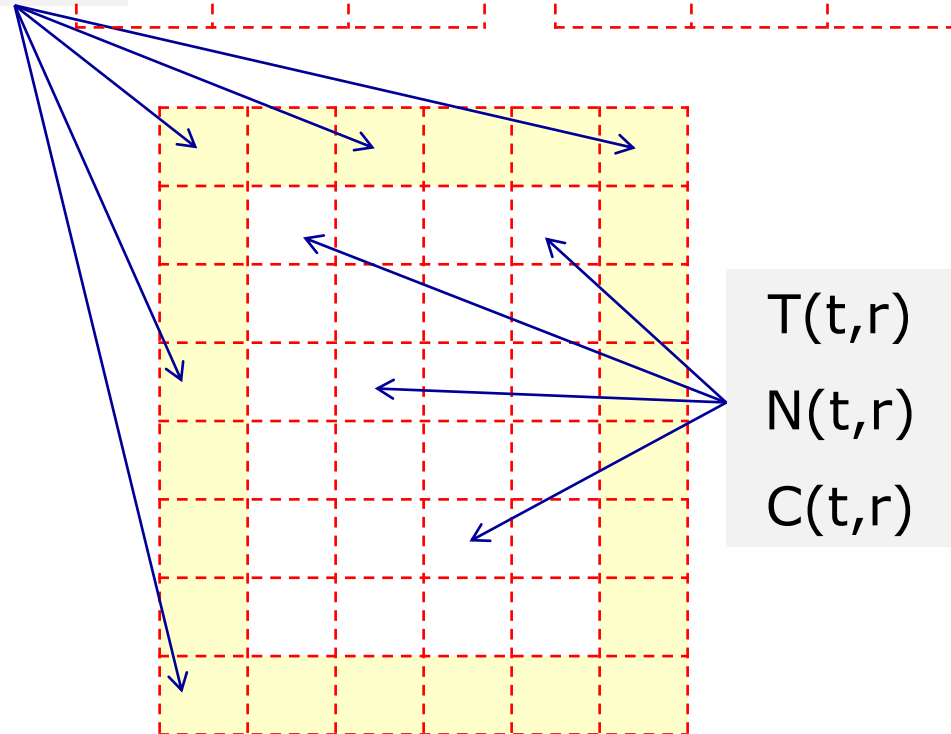
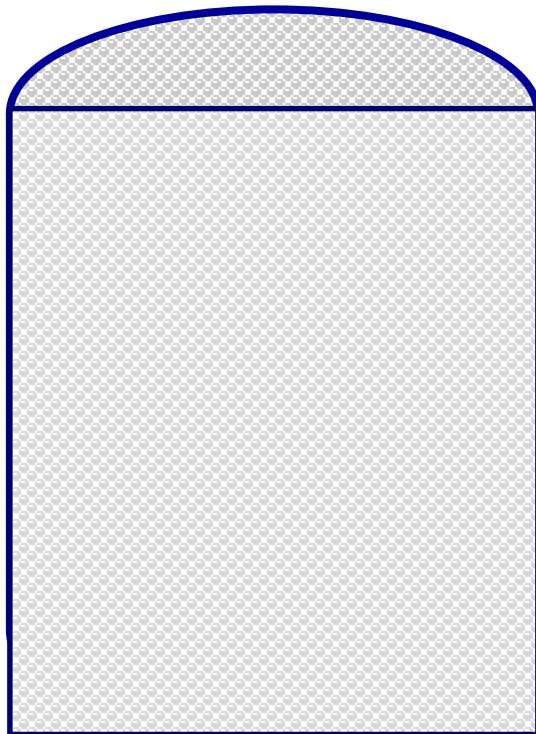
Početni i rubni uvjeti

- jednađba provođenja topline može imati beskonačno mnogo rješenja jer je u svakom djeliću volumena drugačija vrijednost temperature
- zbog toga se uvode početni i rubni uvjeti
- **početni uvjeti** predstavljaju vrijednosti veličina stanja na početku procesa u vremenu $t=0$ (T_0 , N_0 i C_0)
- **rubni ili granični uvjeti** predstavljaju vrijednosti na rubnim površinama krutine i njezine okoline (T_{\max} , C_{\min})

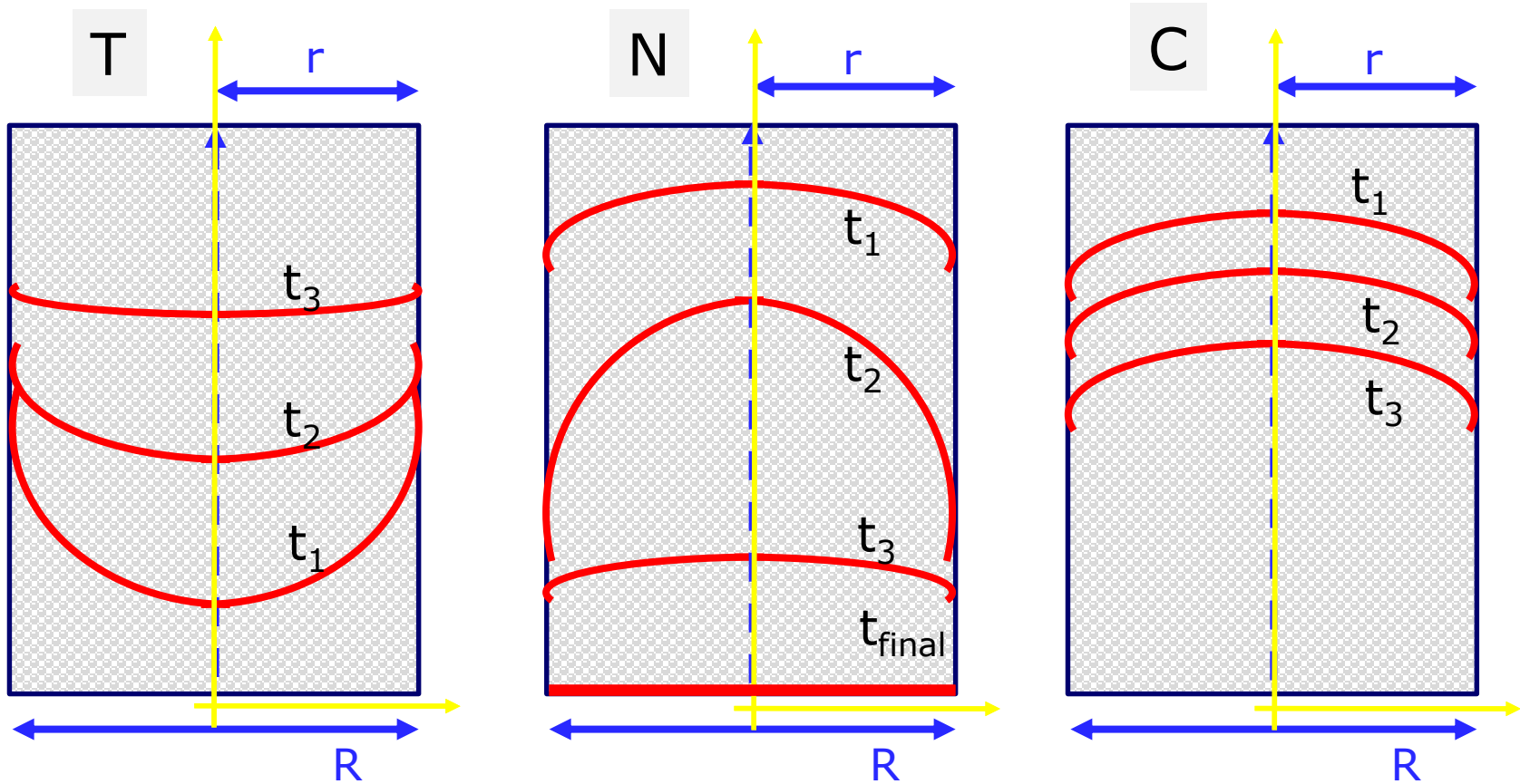


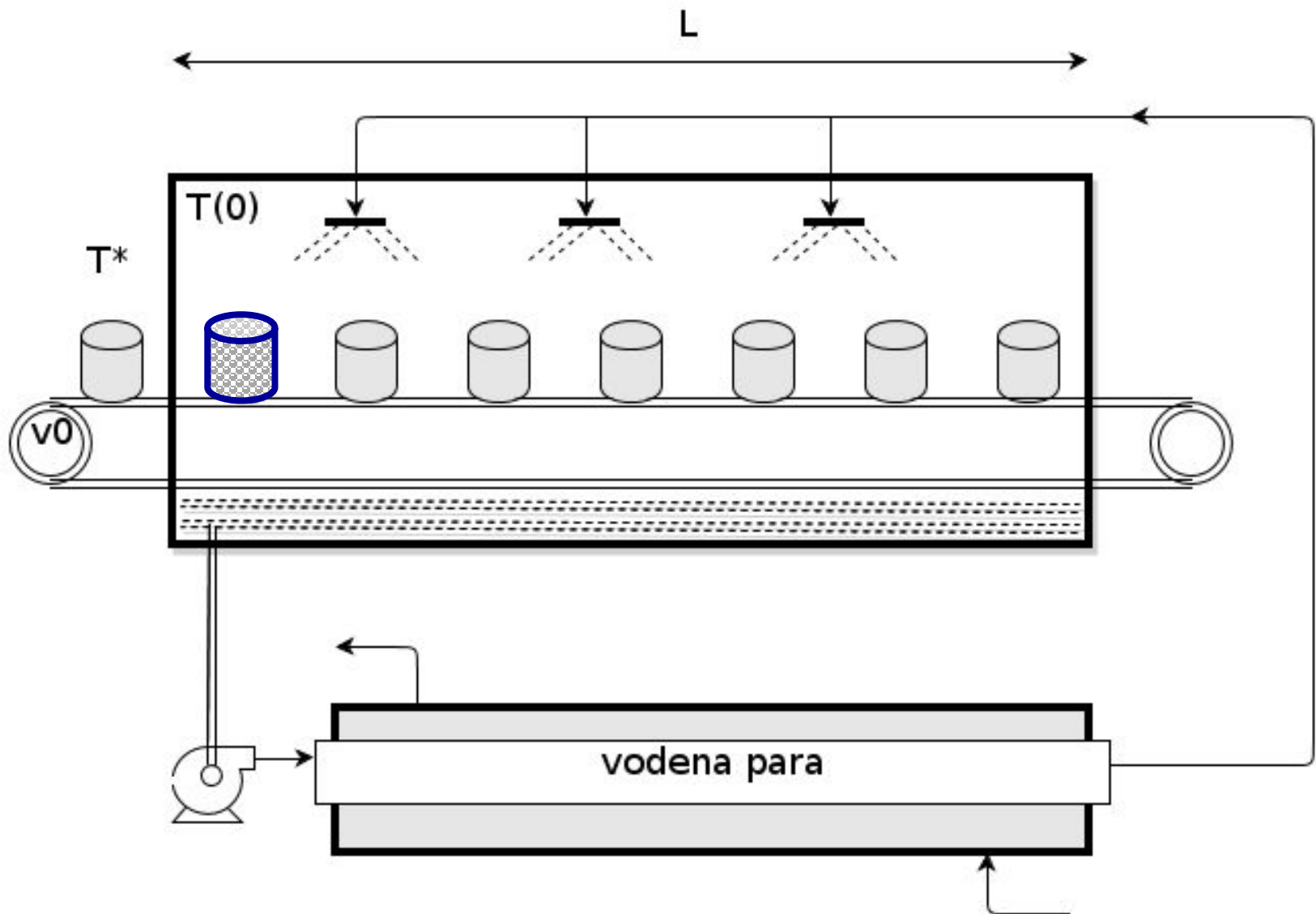
diskretizacija bilanci po volumenu
(t =vrijeme izračunavanja)
(r =položaj djelića volumena)

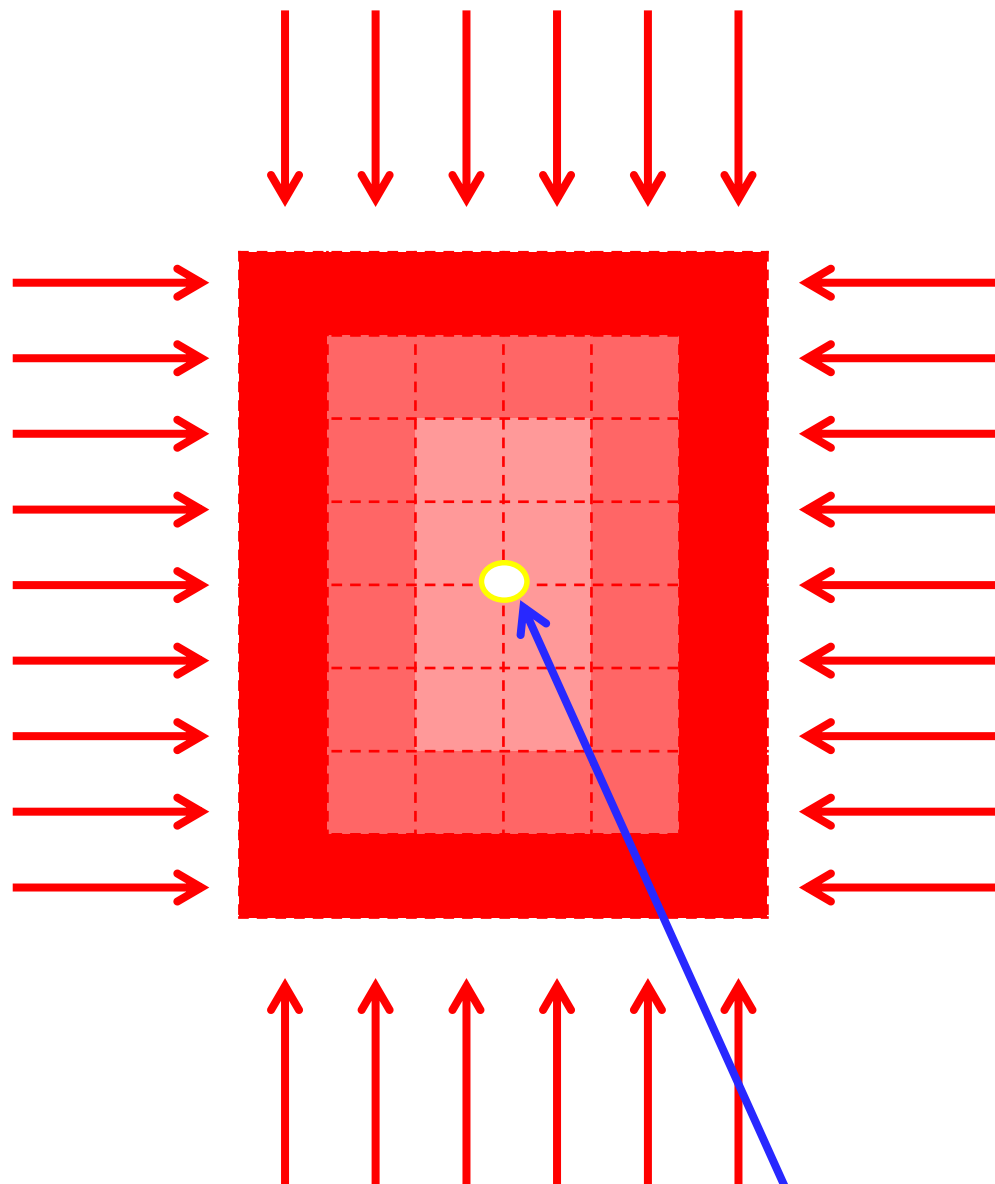
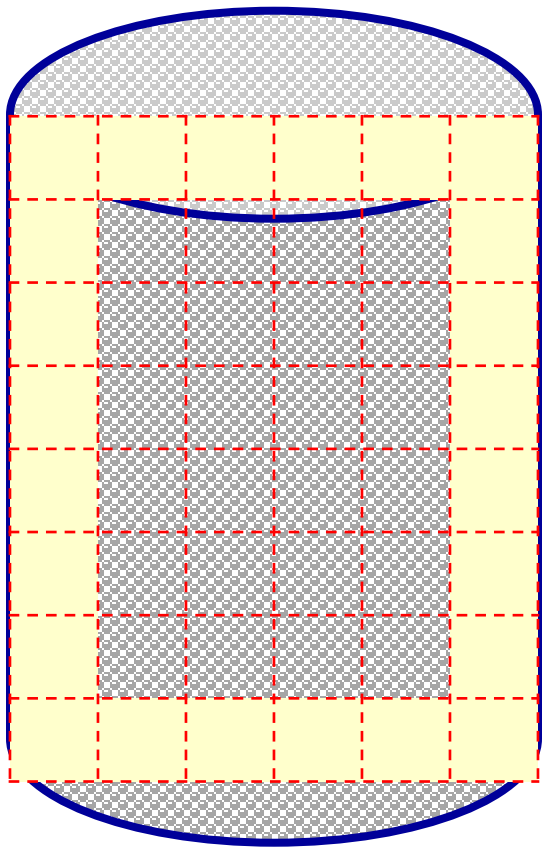
T_0	11	12	13	1	2	3
N_0	21	22	23	4	5	6
C_0	31	32	33	7	8	9



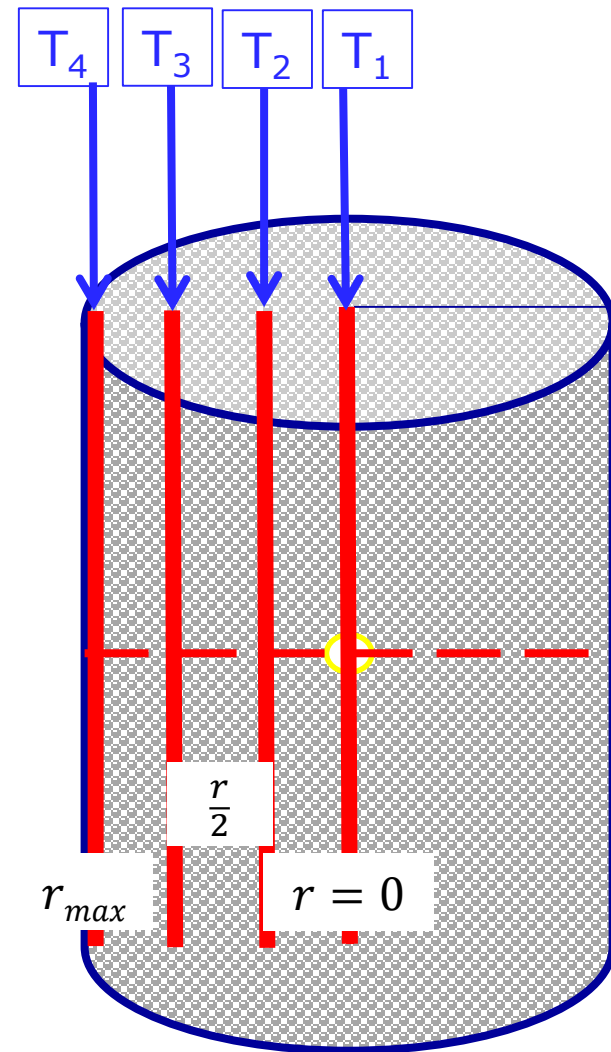
matematični model s distribuiranimi veličinama stanja







Sterilizacija je provedena kada je zadovoljen uvjet: **$N(t_f, r_c) = 0$**



- odredite vrijeme t_f potrebno za provedbu sterilizacije pri zadanim početnim vrijednostima T_0 , N_0 , C_0
- Zadatak: odredite temperaturu T_f u konzervi nakon t_f sekundi



4.1. Modeli dinamičkih stanja sustava

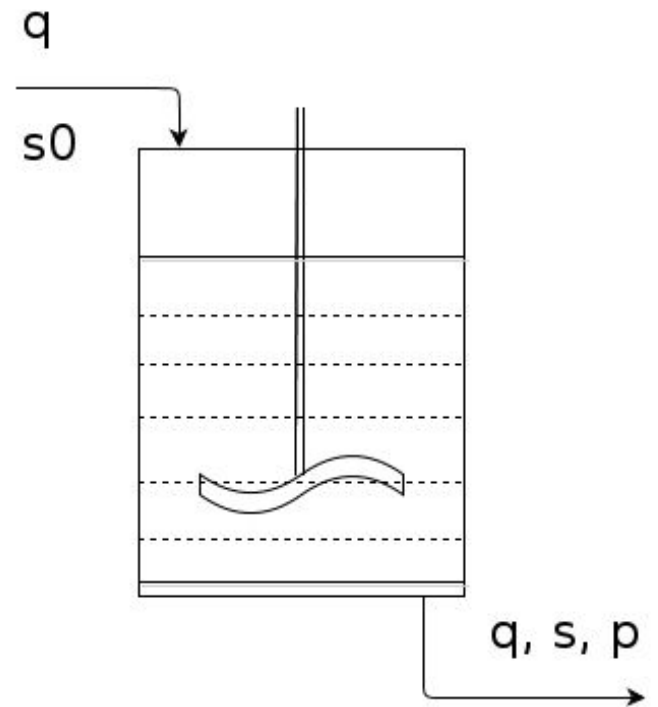
Model zamrzavanja namirnica

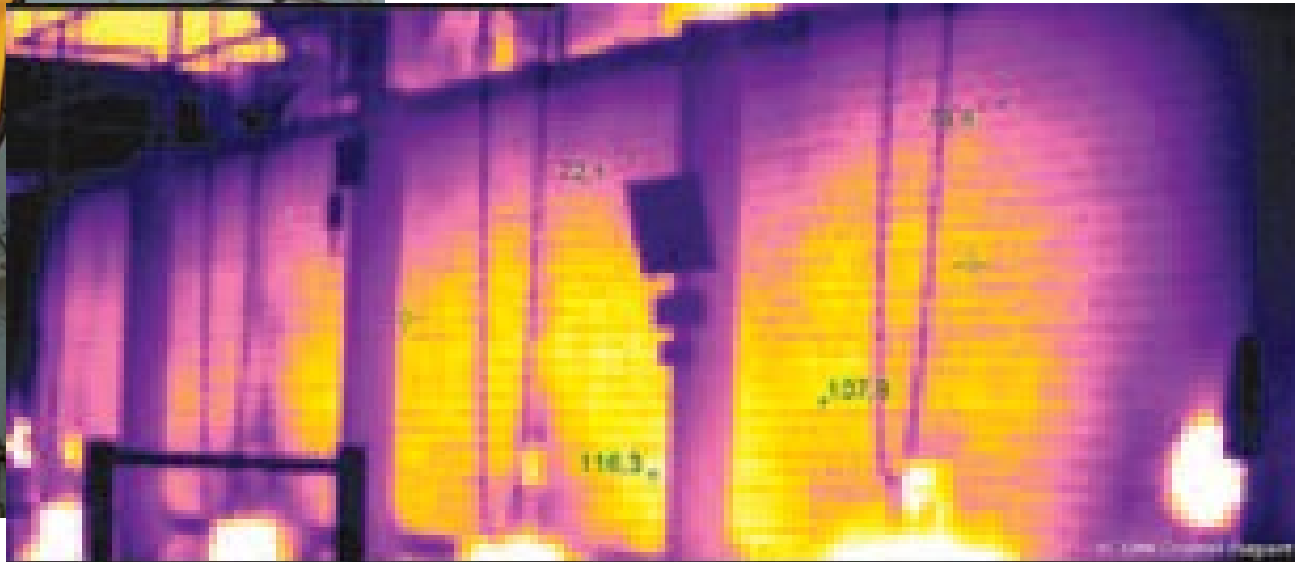
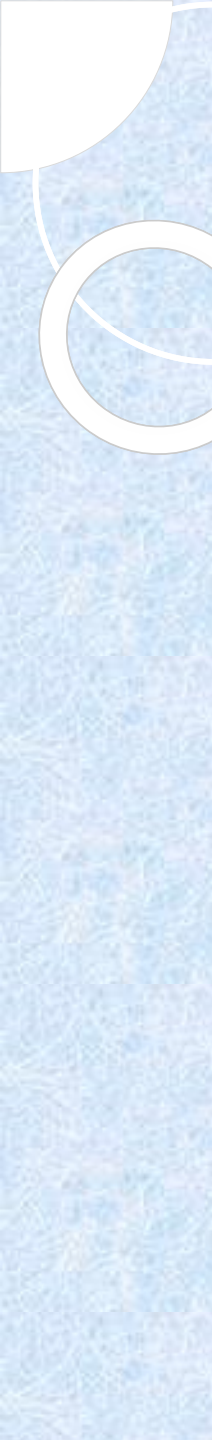
Eulerova metoda za rješavanje diferencijalnih
jednadžbi

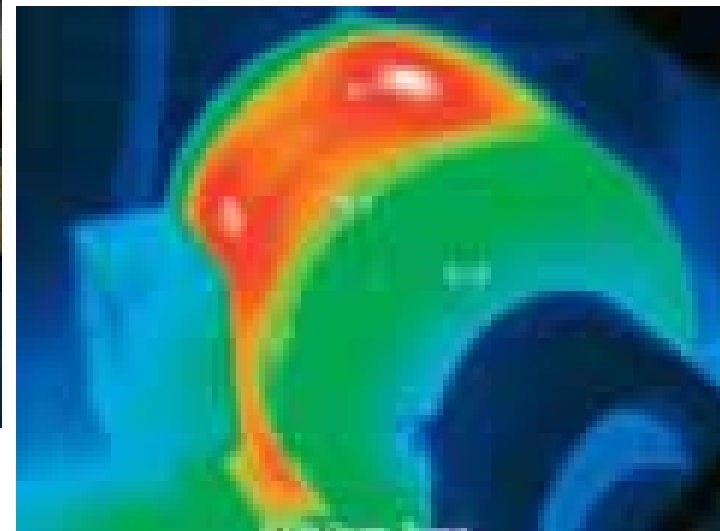
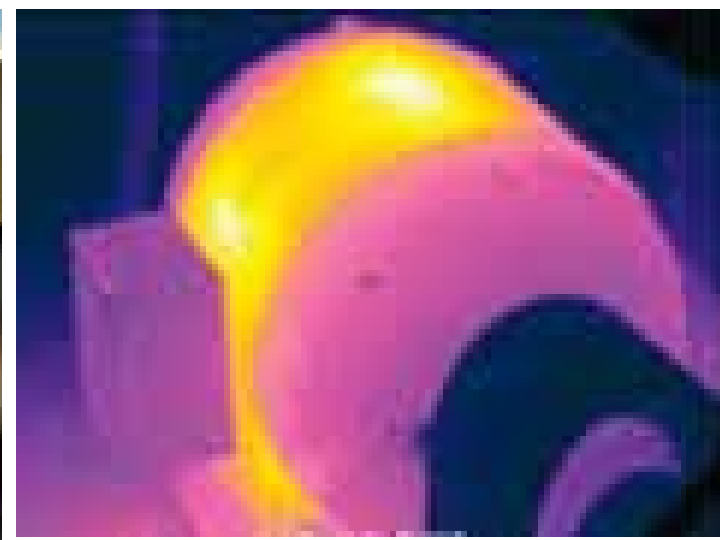
Oprema za mjerenja u termičkim procesima

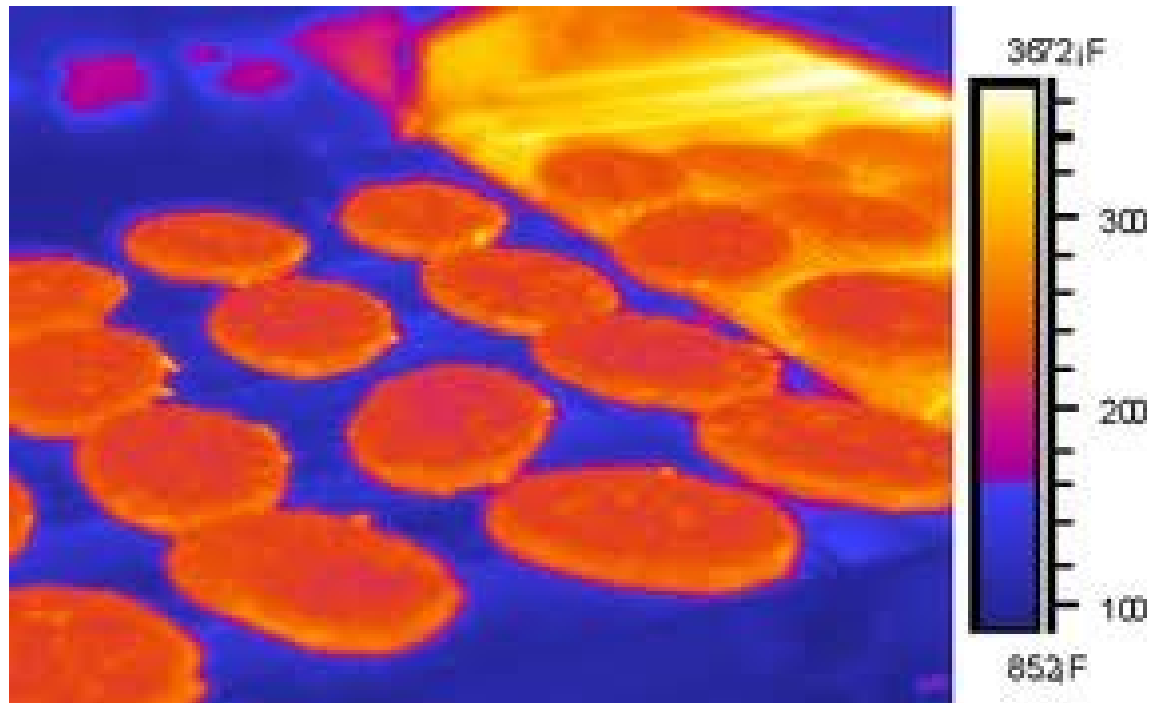
Model sterilizacije namirnica

Model upravljanja biokemijskim reaktorom





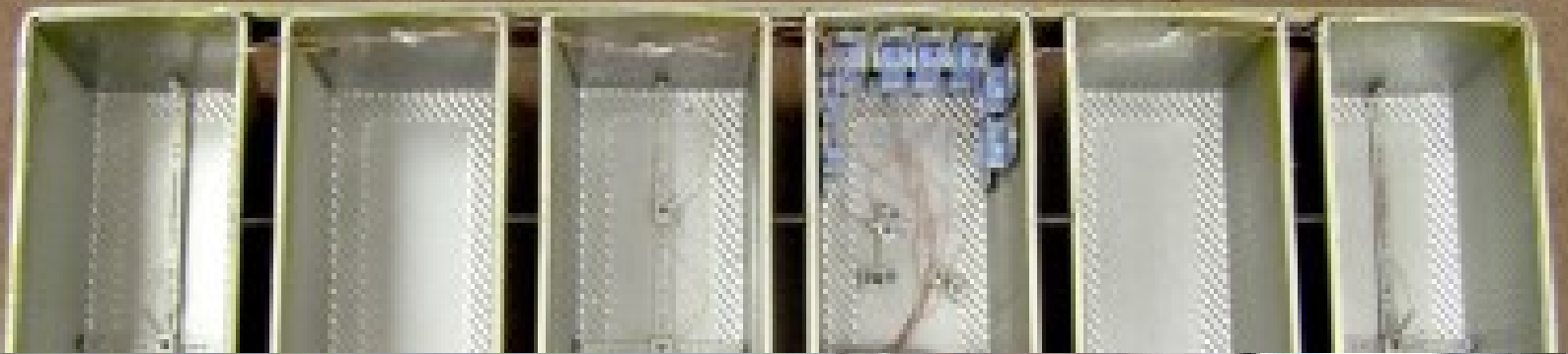




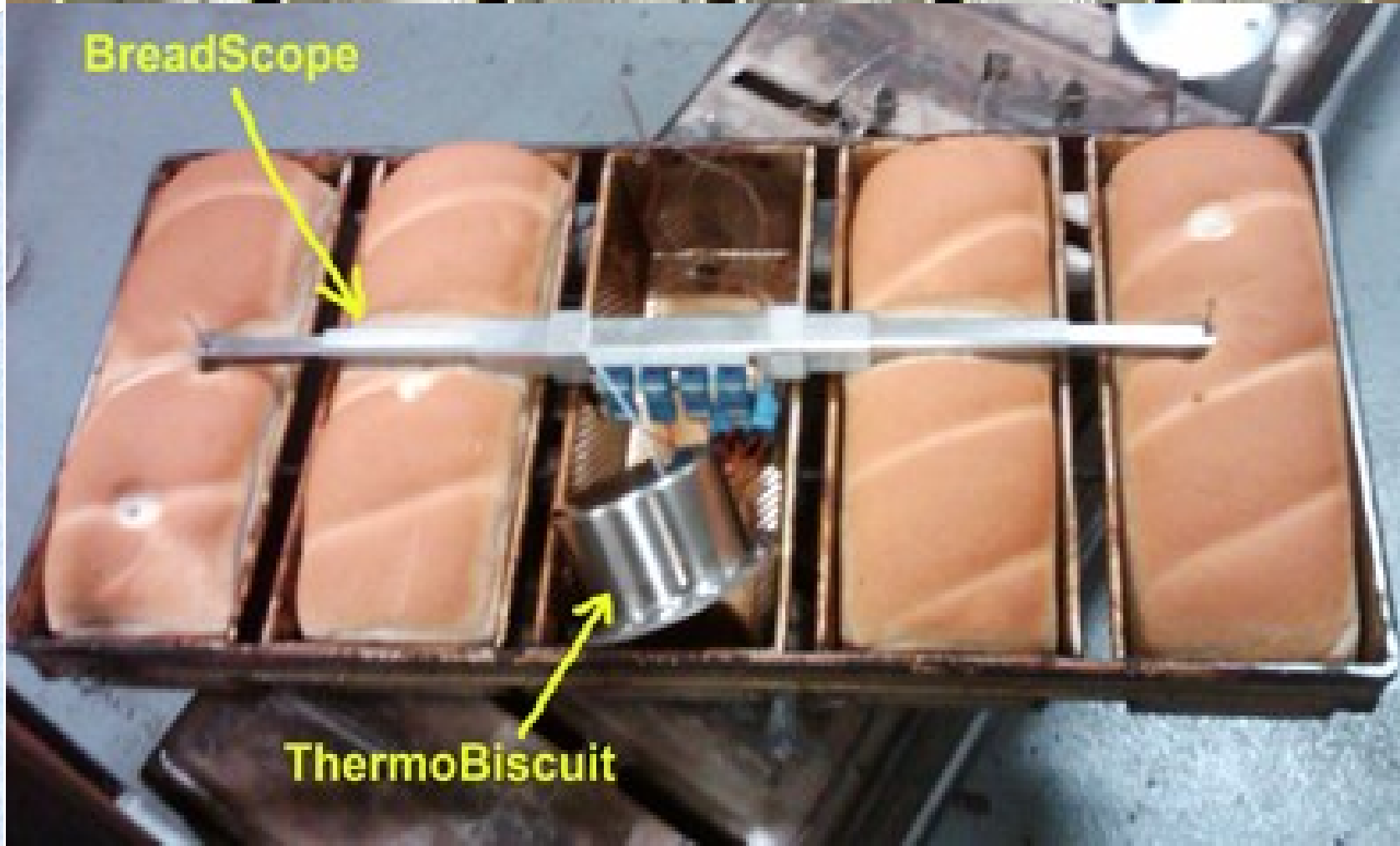


on-line infrared moisture analyzer

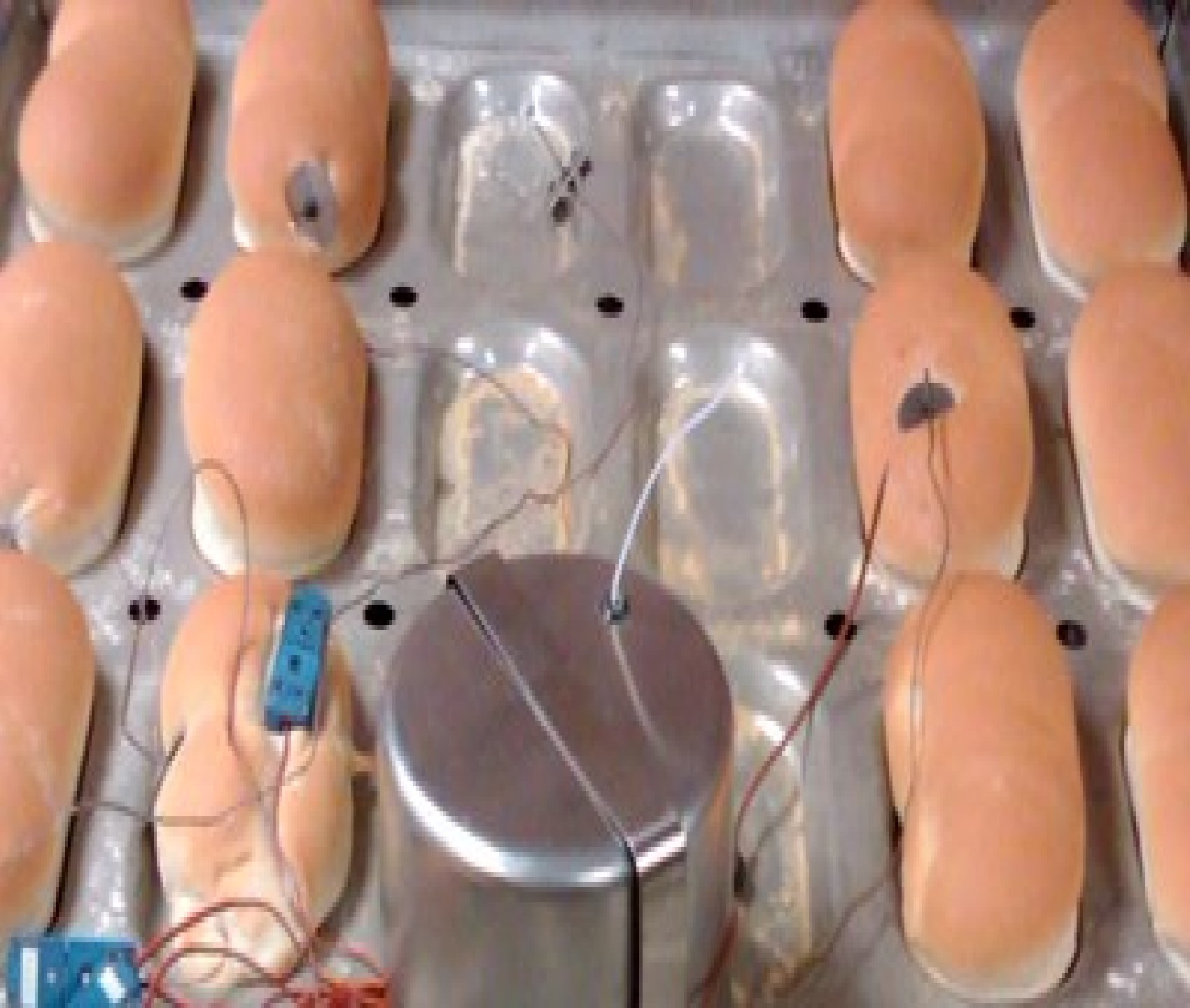




BreadScope



ThermoBiscuit





GateWay™





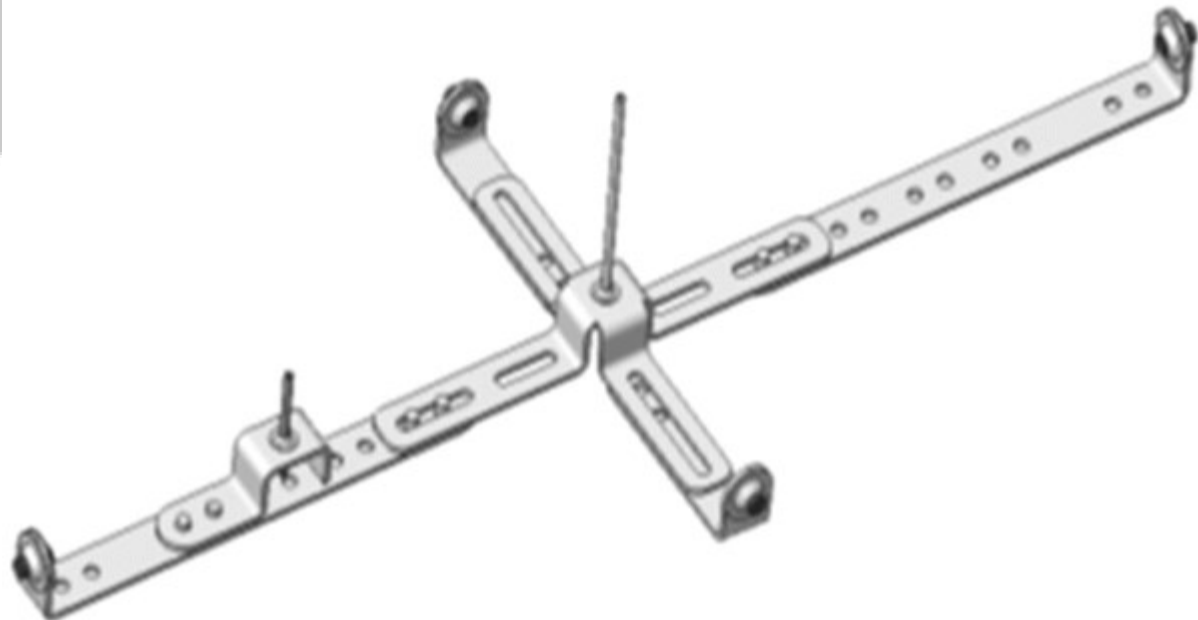
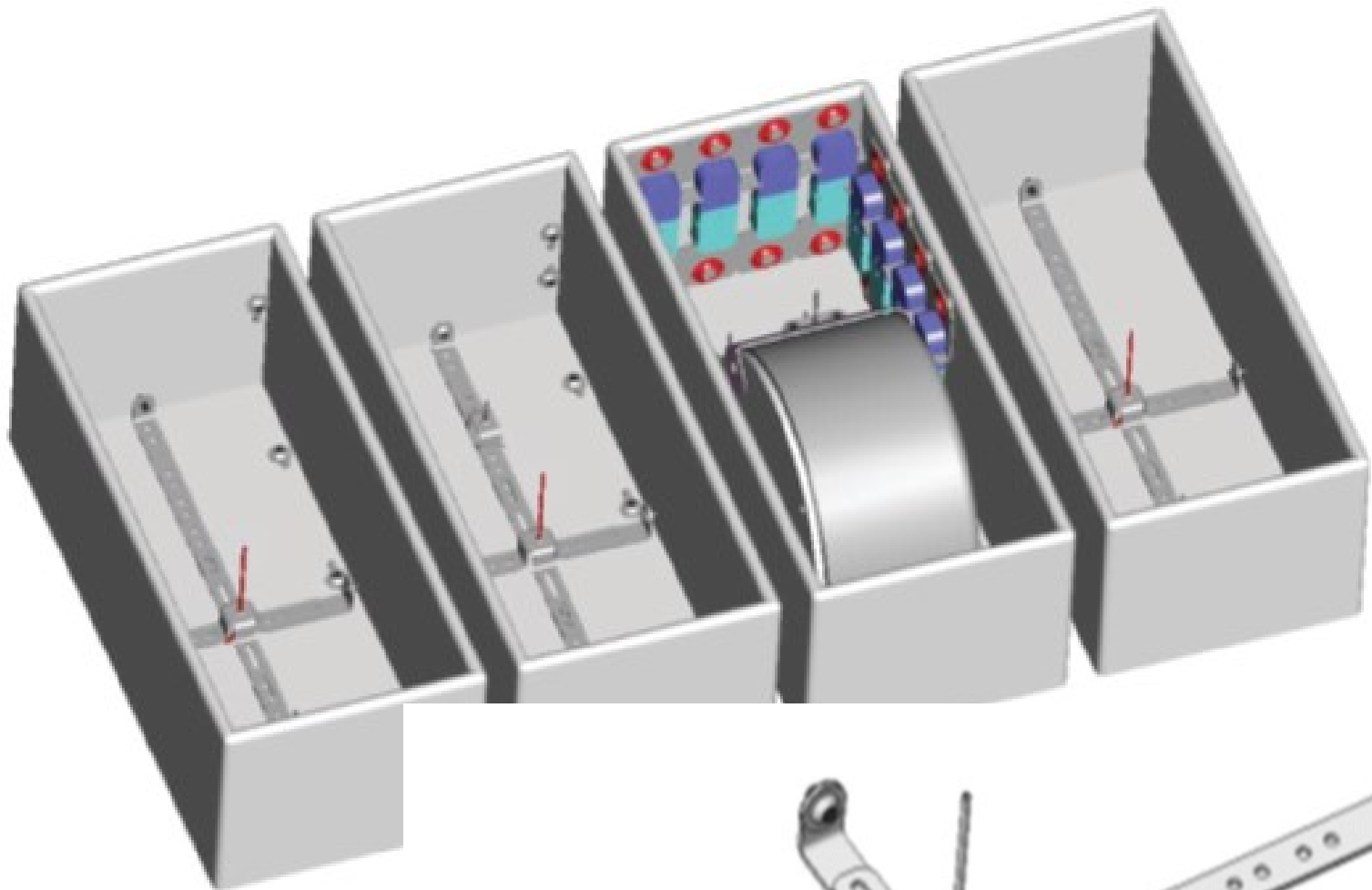
TC-Bridge™ Deployed Configuration

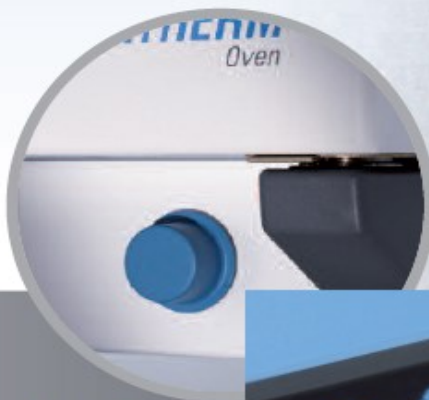


Ring Lug

Standard







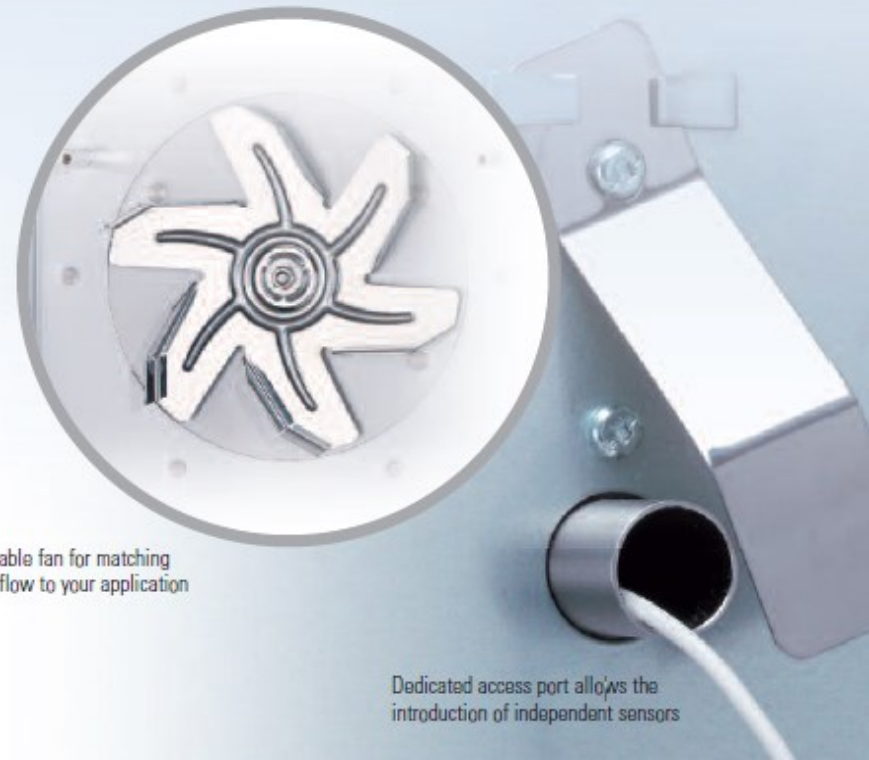
Fresh Air Damper provides control over air exchanges



Standard RS232 interface on all units



Operating up to 250 °C



Adjustable fan for matching the airflow to your application

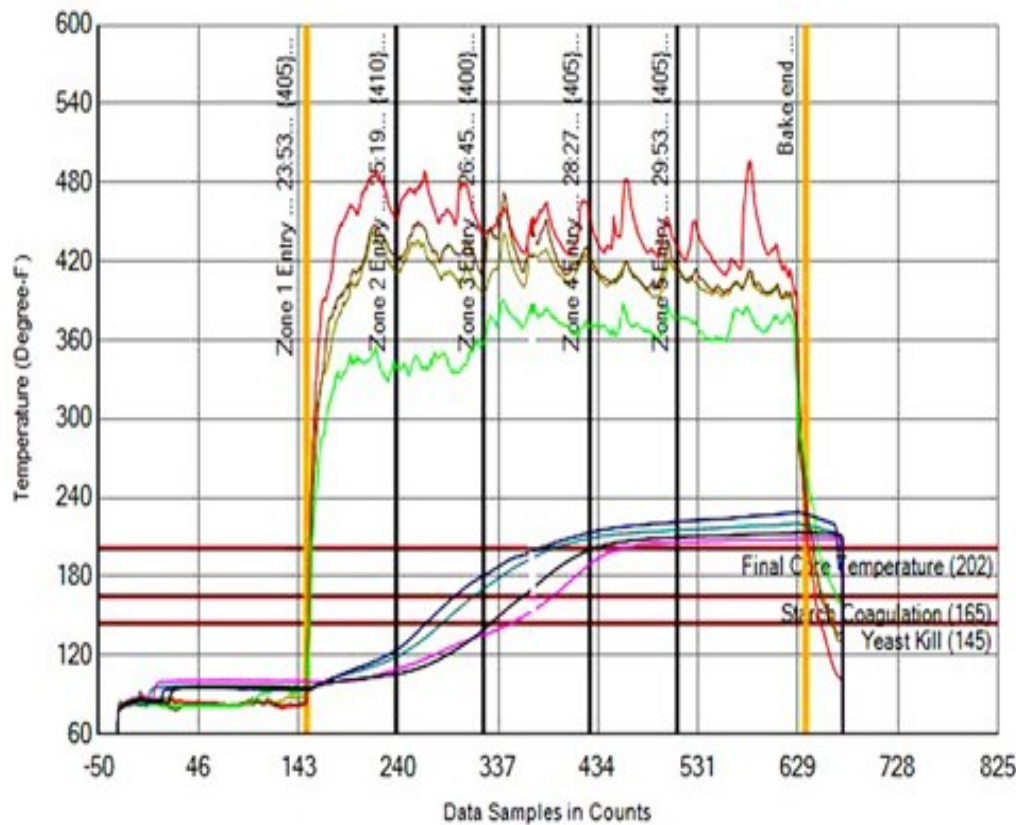
Dedicated access port allows the introduction of independent sensors

Save Print

Report Title

Average Oven Air Temperatures at Channel 1 are

1 427.0 2 464.3 3 444.7 4 441.0 5 434.5 6 ### 7 ### 8 ### 9 ### 10 ###



— Ch1 — Ch2 — Ch3 — Ch4 — Ch5 — Ch6 — Ch7 — Ch8

Report Description

Hot Dog Bun Baking

Average Bake Temperature is 438.5

Data Channels

- Ch1
- Ch2
- Ch3
- Ch4
- Ch5
- Ch6
- Ch7
- Ch8

Baking Profile

Bake started at
 2010-10-20T10:23:53

Total bake time
 00:08:05 (Hr.Min:Sec)

Channel Channel

Yeast kill at 145
 23.71 % 36.70 %

Starch coagulation at 165
 29.28 % 43.09 %

Module No is 1

Units are Degree-F

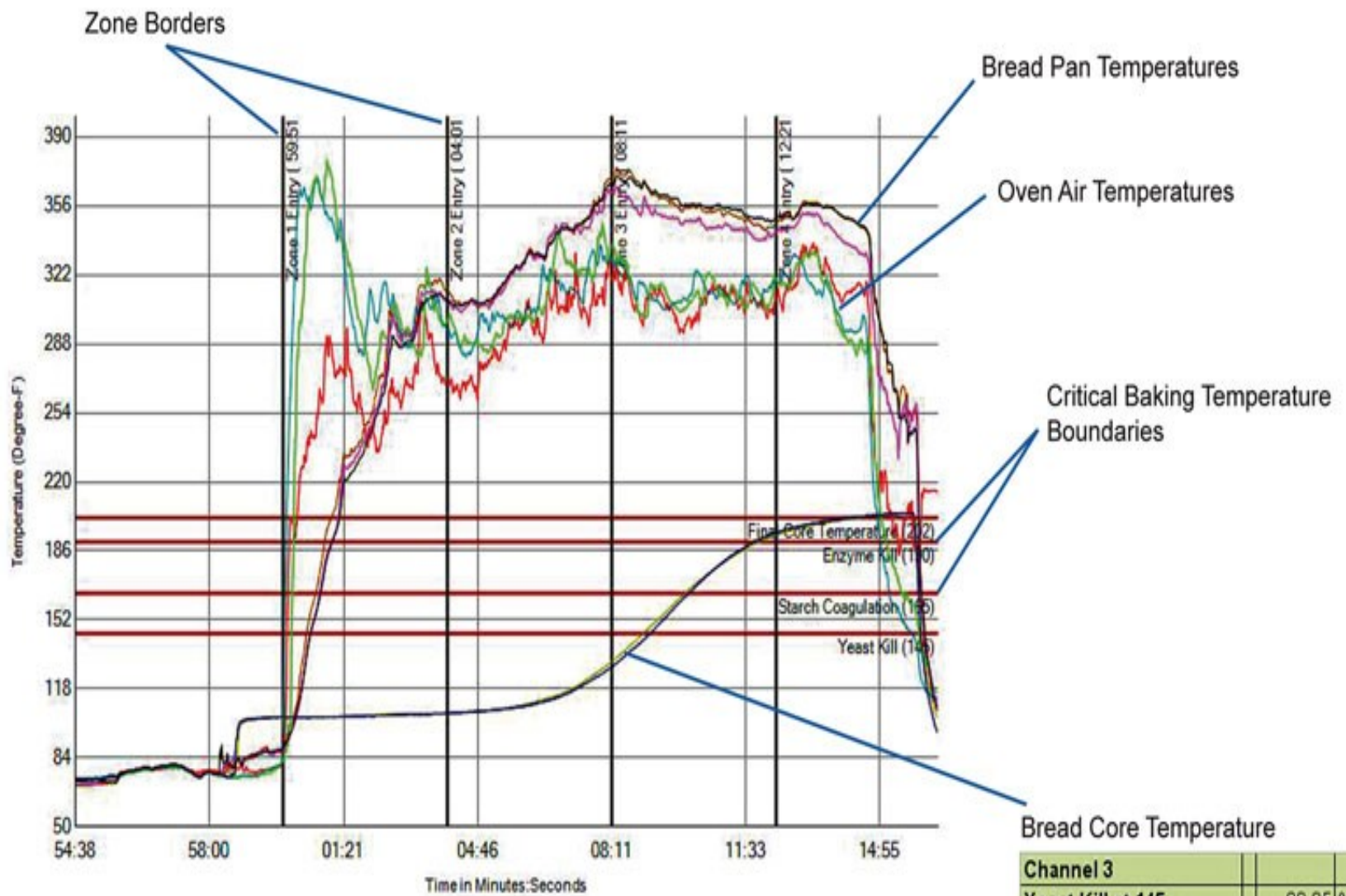
Core temperature at 202
 53.20 % 42.47 %

Ave Zone T

Ave Bake T

Show 3D

Close



Channel 3		
Yeast Kill at 145	66.05	%
Starch Coag. at 165	70.97	%
Enzyme Kill at 190	79.34	%
Final Core Temp. at 202	13.21	%
Channel 6		
Yeast Kill at 145	66.82	%
Starch Coag. at 165	71.43	%
Enzyme Kill at 190	78.88	%
Final Core Temp. at 202	13.9	%

Optimize Your Process with Thermal Profiling

Save Print

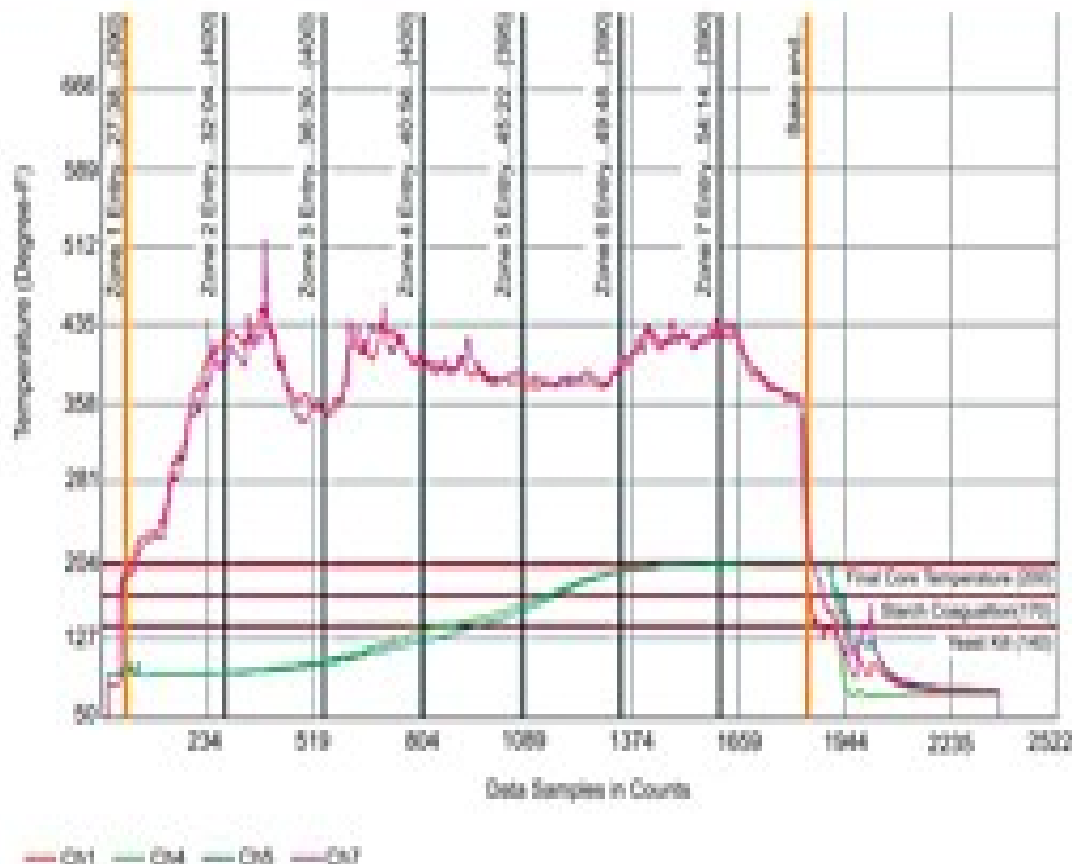
Report Title

Average Oven Air Temperatures at Channel 1 are

1 303.8 2 399.1 3 408.1 4 388.2 5 377.7 6 416.2 7 365.4 8 888 9 888 10 888

Report Description

Facility Name:
Oven Name:



Average Bake Temperature is 351.7

Data Channels

- Ch1
- Ch2
- Ch3
- Ch4
- Ch5
- Ch6
- Ch7
- Ch8

Baking Profile

Bake Started at:
2016-08-24T 09:27:08

Total Bake Time
00:30:28 (4-Min/Sec)

Channel Channel

Yeast K8 at 145

% %

Starch Coagulation at 175

% %

Core temperature at 200

% %

Module No is 1

Temperature unit is Degree F

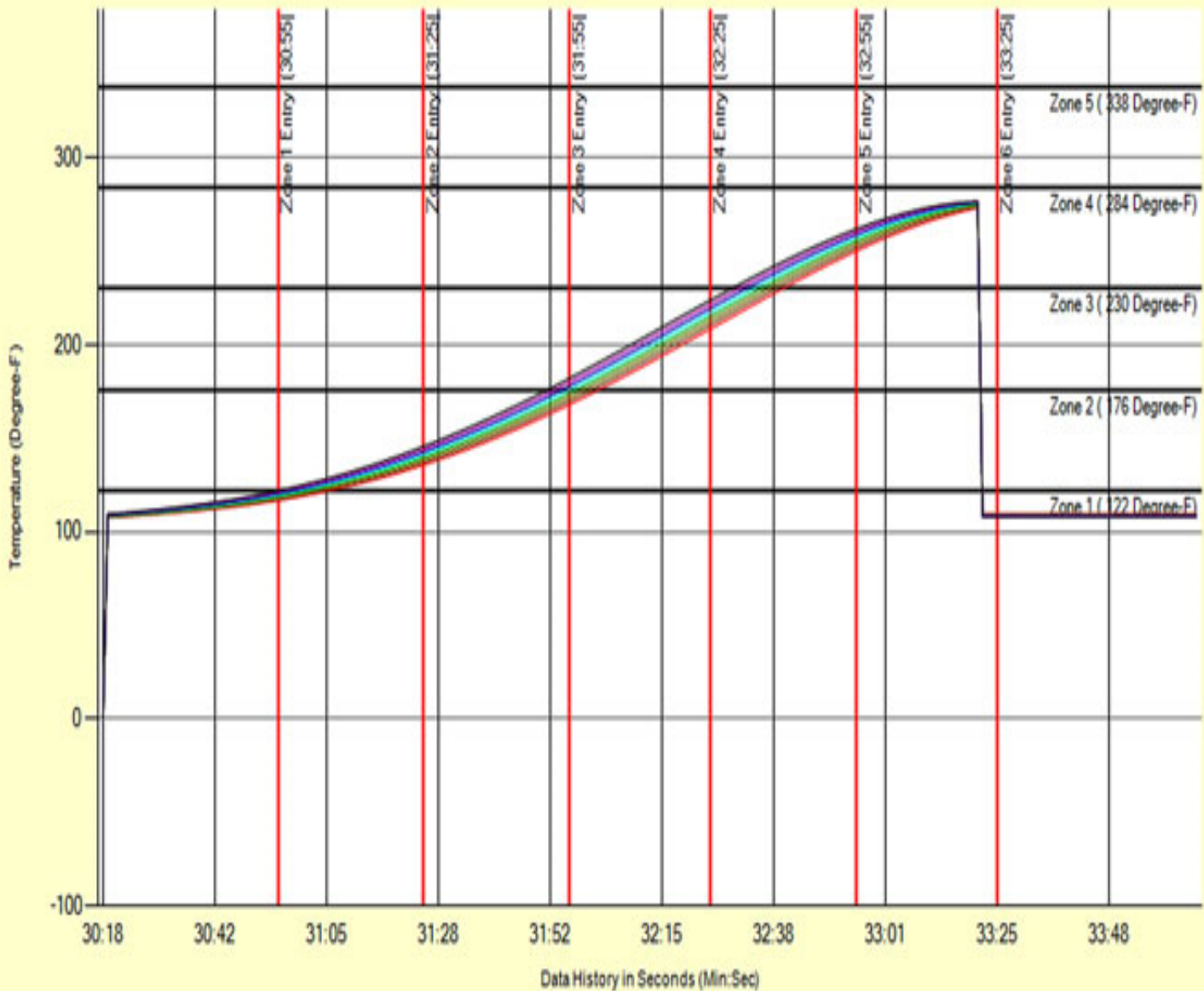
View Zone 1

View Bake 1

Zone 6 Please wait for the baking curve to complete.

Temperature Channel (Degree-F)

- A 109.40
- B 109.24
- C 109.07
- D 108.91
- E 108.74
- F 108.58
- G 108.41
- H 108.25



- Ch. A- Ch. 1 of Node 3088
- Ch. B- Ch. 2 of Node 3088
- Ch. C- Ch. 3 of Node 3088
- Ch. D- Ch. 4 of Node 3088
- Ch. E- Ch. 5 of Node 3088
- Ch. F- Ch. 6 of Node 3088
- Ch. G- Ch. 7 of Node 3088
- Ch. H- Ch. 8 of Node 3088

Test Control

Start Test Stop Test Cancel Test Close

Sensor Reading

Node S/N: 6055

Channel	Temperature (Degree C)	Channel	Temperature (Degree C)
1	24.99	5	24.92
2	25.06	6	24.99
3	25.01	7	24.96
4	24.88	8	25.01

Test Status

Test is in process. Receive data from 2 Node(s). Test will end at 11:31:57 AM, Jun 21, 2007

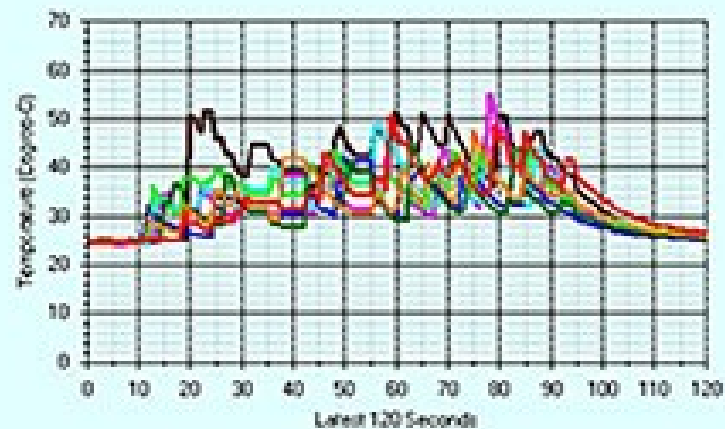
Test start time is 11:21:57 AM, Jun 21, 2007

Network time is 11:27:48 AM, Jun 21, 2007

ThermoSpyder Node 6058

Print

Channel	Temperature (Degree-C)
<input checked="" type="checkbox"/> 1	25.64
<input checked="" type="checkbox"/> 2	25.81
<input checked="" type="checkbox"/> 3	25.47
<input checked="" type="checkbox"/> 4	26.07
<input checked="" type="checkbox"/> 5	25.17
<input checked="" type="checkbox"/> 6	25.23
<input checked="" type="checkbox"/> 7	25.25
<input checked="" type="checkbox"/> 8	25.21



Test Control

Start Test Stop Test Cancel Test Close

Sensor Reading

Node S/N 6055

Channel	Temperature (Degree-C)	Channel	Temperature (Degree-C)
1	24.60	5	24.69
2	25.24	6	25.28
3	24.63	7	25.37
4	25.37	8	24.60

Test Status

Test is in process. Receive data from 3 Node(s). Test will end at 03:00:13 PM, Jun 21, 2007

Test start time is 02:53:13 PM, Jun 21, 2007

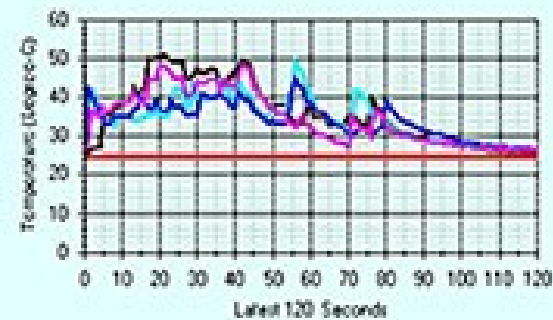
Network time is 02:55:03 PM, Jun 21, 2007

Chart 1

Print Scale

Temperature (Degree-C) Average

<input checked="" type="checkbox"/> A	24.57	24.59
<input checked="" type="checkbox"/> B	24.60	24.62
<input checked="" type="checkbox"/> C	24.54	24.51
<input checked="" type="checkbox"/> D	24.46	24.45
<input checked="" type="checkbox"/> E	26.17	33.44
<input checked="" type="checkbox"/> F	26.31	32.87
<input checked="" type="checkbox"/> G	26.03	33.14
<input checked="" type="checkbox"/> H	25.28	34.38
Maximum	50.76	24.29



— Ch. A- Ch. 1 of Node 6055

— Ch. C- Ch. 1 of Node 6056

— Ch. E- Part A (Node 6050 Ch 1)

— Ch. G- Inlet A (Node 6050 Ch 5)

— Ch. B- Ch. 3 of Node 6055

— Ch. D- Ch. 4 of Node 6056

— Ch. F- Part B (Node 6050 Ch 2)

— Ch. H- Outlet A (Node 6050 Ch 7)

Test Control

Start Test Stop Test Cancel Test Close

Sensor Reading

Node S/N 6055

Channel	Temperature (Degree-C)	Channel	Temperature (Degree-C)
1	24.60	5	24.69
2	25.24	6	25.28
3	24.63	7	25.37
4	25.37	8	24.60

Test Status

Test is in process. Receive data from 3 Node(s). Test will end at 03:00:13 PM, Jun 21, 2007

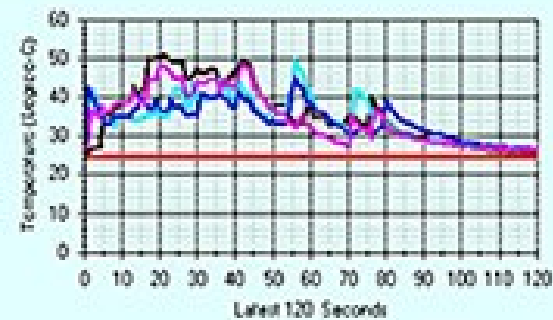
Test start time is 02:53:13 PM, Jun 21, 2007

Network time is 02:55:03 PM, Jun 21, 2007

Chart 1

Print Scale

Channel	Temperature (Degree-C)	Average
<input checked="" type="checkbox"/> A	24.57	24.59
<input checked="" type="checkbox"/> B	24.60	24.62
<input checked="" type="checkbox"/> C	24.54	24.51
<input checked="" type="checkbox"/> D	24.46	24.45
<input checked="" type="checkbox"/> E	26.17	33.44
<input checked="" type="checkbox"/> F	26.31	32.87
<input checked="" type="checkbox"/> G	26.03	33.14
<input checked="" type="checkbox"/> H	25.28	34.38
Maximum	50.76	24.29



— Ch. A- Ch. 1 of Node 6055

— Ch. C- Ch. 1 of Node 6056

— Ch. E- Part A (Node 6050 Ch 1)

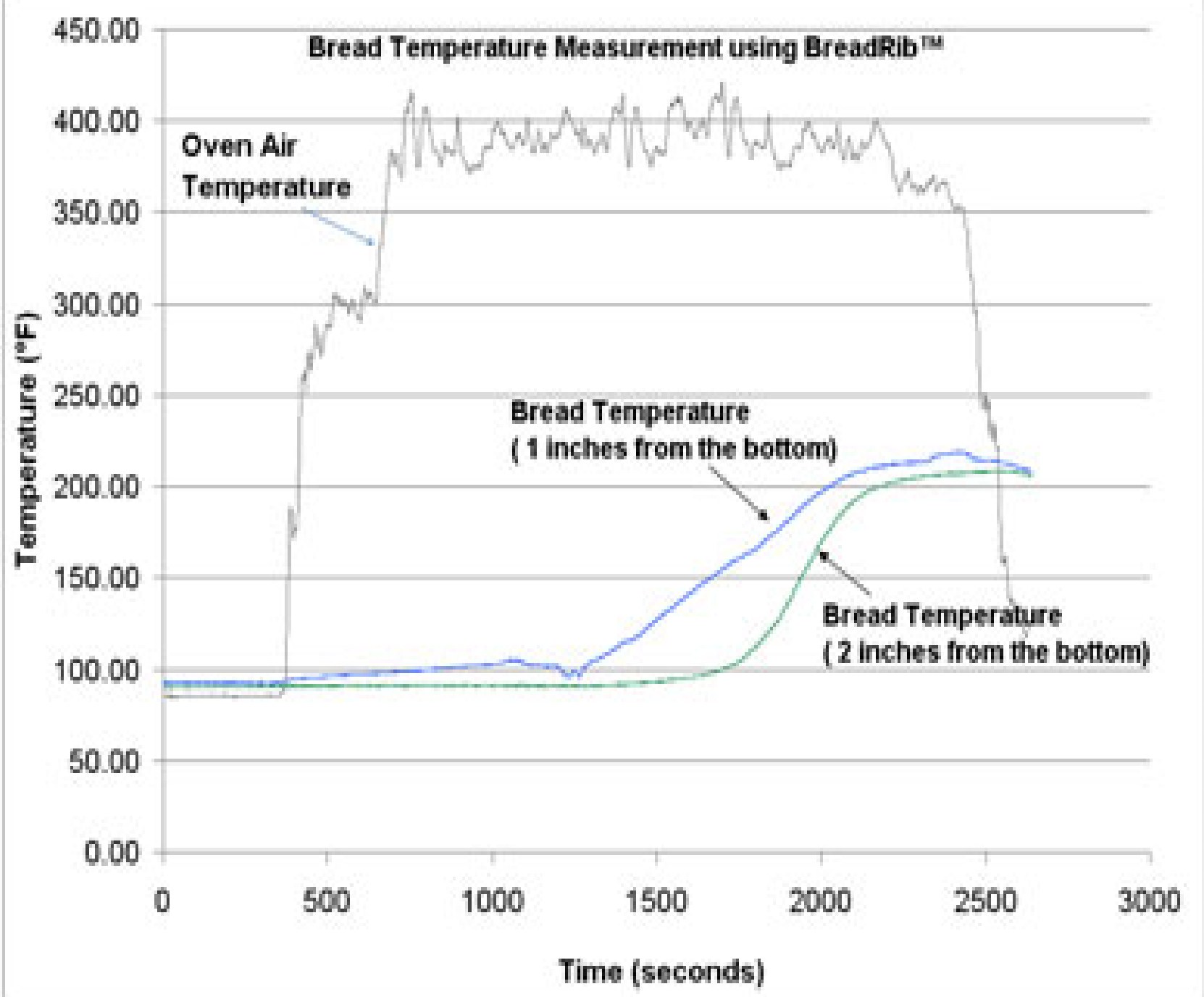
— Ch. G- Inlet A (Node 6050 Ch 5)

— Ch. B- Ch. 3 of Node 6055

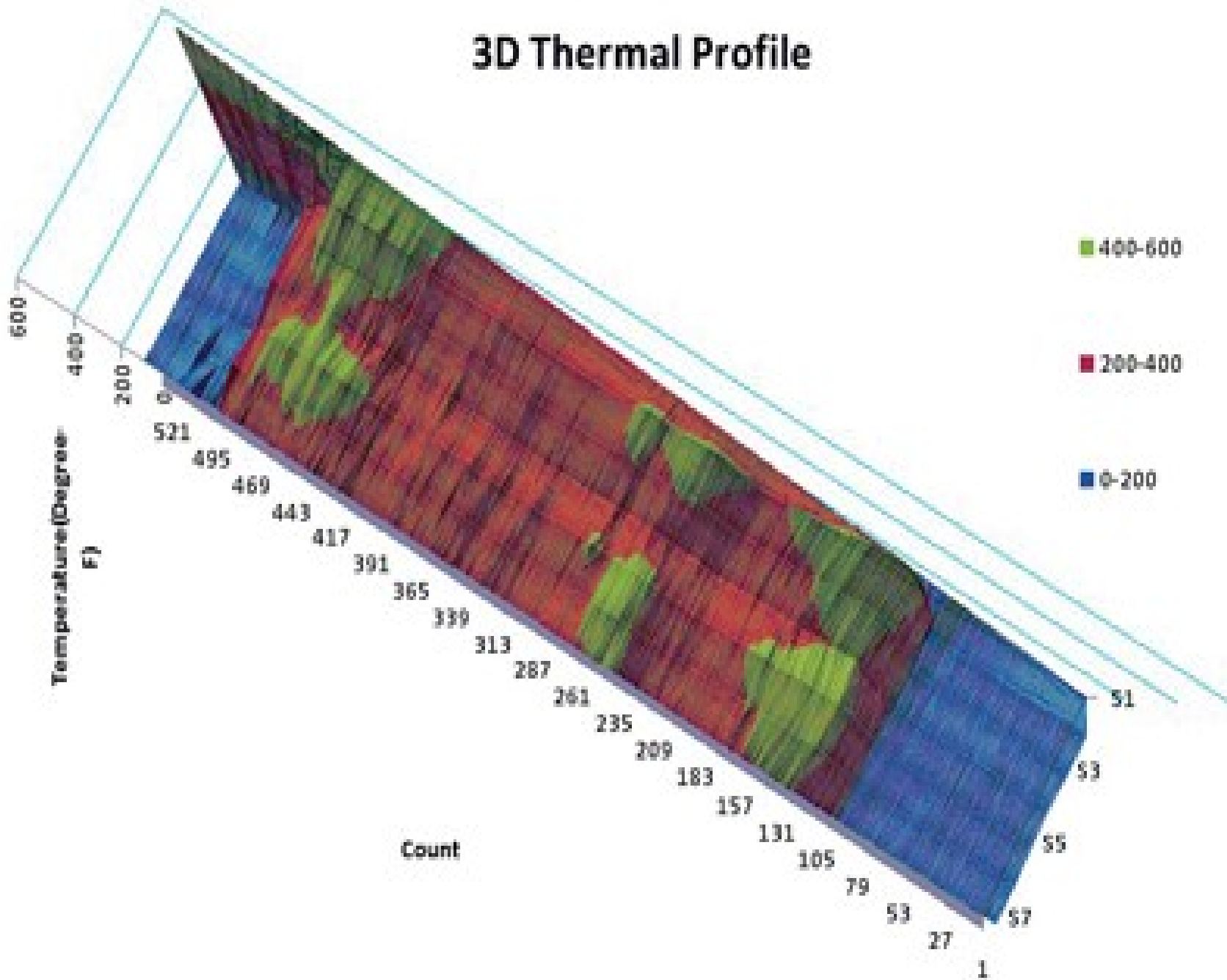
— Ch. D- Ch. 4 of Node 6056

— Ch. F- Part B (Node 6050 Ch 2)

— Ch. H- Outlet A (Node 6050 Ch 7)



3D Thermal Profile



- za bežično mjerenje relativne vlažnosti i temperature zraka ili proizvoda u pećnici, tunelu za sušenje, hlađenje ili smrzavanje, fermentoru i drugdje
- točnost od 0,1 °C
- posebno je prikladna za prehrambeno-procesnu industriju i laboratorijska mjerenja
- potrebno je računalo
- oprema ne stvara dodatne troškove tijekom rada
- mjerenja u temperaturnom rasponu od -200 °C do 900 °C
- oprema podnosi temperaturne raspone od -276 °C do 300 °C
- podaci se pohranjuju u Excel tablicu i u tekst formatu
- tablični i grafički prikaz podataka (2D i 3D)

5.1. Linearno programiranje

Metode matematičkog optimiranja

Linearno programiranje

Struktura modela linearnog programiranja

Primjeri optimiranja primjenom Simplex algoritma:

- sastava smjese sirovina
- obroka i jelovnika
- plana proizvodnje
- prijevoza robe

Metode matematičkog optimiranja

- cjelobrojno programiranje
- linearno programiranje *
- nelinearno programiranje
- stohastičko programiranje
- dinamičko programiranje

Linearno programiranje

Linearno programiranje je rješavanje matematičkog zadatka s ciljem optimiranja vrijednosti *linearne funkcije cilja* čije varijable zadovoljavaju *sustav ograničenja* koji je zadan linearnim jednadžbama i/ili nejednadžbama.

Modeli linearnog programiranja

predstavljani su linearnim jednadžbama i nejednadžbama od kojih neke predstavljaju funkciju cilja, a neke ograničenja.

Primjene metode linearnog programiranja:

- izbor lokacije tvornica
- optimalno planiranje investicijskih ulaganja
- optimiranje proizvodnih programa ←
- optimiranje razmještaja strojeva
- izbor optimalnih tehnoloških postupaka
- optimiranje plana prehrane ←
- optimiranje transporta ←
- optimiranje sastava obroka ←
- ...

Općenito:

metode linearnog i nelinearnog programiranja
optimiraju modele sustava koji su u stacionarnom stanju

SIROVINA	MASNOĆA (%)	PEPEO (%)	CIJENA (kn/kg)
S ₁	0,08	0,02	1,8
S ₂	0,12	0,035	3,15

Namirnica		Bjelančevine		Masnoće	Ugljikohidrati	Cijena
		Životinjske	Biljne			(kn/kg)
x1	mast			1,00		10,0
x2	ulje			1,00		12,0
x3	meso	0,20		0,08		30,0
x4	mlijeko	0,03		0,04	0,05	6,0
x5	šećer				1,00	7,0
x6	riža		0,08	0,02	0,78	5,0
x7	brašno		0,12	0,02	0,72	4,0
x8	grah		0,24	0,02	0,47	15,0
x9	krumpir		0,02		0,19	2,0

Komponente obroka	Varijable	Energija (kJ)	Proteini (g)	Masti (g)	Ca (mg)	Fe (mg)	Vit. C (mg)	Cijena (kn)
Doručak 1 <i>Cornflakes, mlijeko</i>	d1	2050	6	3	350	4	3	3,0
Doručak 2 <i>pašteta, kruh, kakao</i>	d2	2136	8	7	369	6	2	3,8
Juha 1 <i>juha od rajčice</i>	x1	836	7	5	92	3	9	2,7
Juha 2 <i>juha od povrća</i>	x2	820	4	6	63	3	15	2,7
Prilog 1 <i>riža</i>	x3	1797	6	4	51	1	35	4,5
Prilog 2 <i>krumpir pire</i>	x4	1987	6	6	13	-	-	5,1
Govedina u umaku	x5	2430	20	29	60	5	10	5,7
Pljeskavica	x6	2900	28	39	34	2	5	6,9
Desert 1 <i>naranča</i>	x7	526	1	-	63	1	77	0,6
Desert 2 <i>puding</i>	x8	883	3	3	31	-	-	1,2
Desert 3 <i>kompot</i>	x9	1053	2	5	18	1	22	1,8
Desert 4 <i>pita od sira</i>	x10	2160	21	6	84	3	-	2
Večera 1 <i>hrenovke, kruh, senf</i>	v1	2898	12	16	25	2	3	5,6
Večera 2 <i>krafne, jogurt</i>	v2	2299	6	13	554	3	1	4,5

Struktura modela linearnog programiranja

Model linearnog programiranja čine:

model funkcije cilja

(Fc)

i

model ograničenja

(<, <=, =, >=, >)

- **Simplex metoda** (G. Dantzig, 1947. G)

Model funkcije cilja (linearni):

$$Fc = \underline{c_1} \cdot x_1 + \underline{c_2} \cdot x_2 + \dots + \underline{c_N} \cdot x_N \quad (\text{MIN / MAX})$$

Model ograničenja (linearni):

oblika \leq

$$a_{i,1} \cdot x_1 + a_{i,2} \cdot x_2 + \dots + a_{i,N} \cdot x_N \leq b_i$$

oblika $=$

$$a_{j,1} \cdot x_1 + a_{j,2} \cdot x_2 + \dots + a_{j,N} \cdot x_N = b_j$$

oblika \geq

$$a_{M,1} \cdot x_1 + a_{M,2} \cdot x_2 + \dots + a_{M,N} \cdot x_N \geq b_M$$

$$x_i \geq 0$$

M = broj ograničenja

N = broj varijabli

Ograničenja određuju skup dopustivih rješenja (n-terokut).

MODEL
FUNKCIJE
CILJA

EKONOMSKI UVJETI

*(cijene: sirovina, proizvoda, energije,
radne snage i kapitala)*

TEHNOLOŠKI UVJETI

*(iskoristivost tehnoloških kapaciteta,
sirovina i tržišta)*

KAKVOĆA PROIZVODA

(nutritivna i senzorska svojstva)

**MODEL
OGRANIČENJA**

EKONOMSKA OGRANIČENJA

*(ograničenost finansijskih sredstava,
raspoloživih sirovina i tržišta)*

TEHNOLOŠKA OGRANIČENJA

*(ograničenost tehnoloških postrojenja,
raspoloživost energije i radne snage)*

KAKVOĆA PROIZVODA

(standardi proizvoda i proizvodnje - ISO)

UTJECAJ NA OKOLIŠ

(kemijski i biološki utjecaj na okoliš)

Primjeri modela optimiranja

- Optimiranje sastava smjese sirovina (*količine i max. dobit*)
- Optimiranje sastava i cijene obroka (*sastav i min. cijena*)
- Optimiranje jelovnika (*sastav i min. cijena*)
- Optimiranje plana proizvodnje (*količine i max. dobit*)
- Optimiranje prijevoza robe (*količine i min. troškovi*)



Primjer 1.

Optimiranje dobiti i sastava smjese dvaju sirovina

SIROVINA	MASNOĆA (udio, %)	PEPEO (udio, %)	CIJENA (kn/kg)
S_1	0,08	0,02	1,8
S_2	0,12	0,035	3,15

Prodajna cijena smjese je 4,5 kn/kg.

MODEL FUNKCIJE CILJA

$F_{C \text{ MAX}} = \text{dobit} = \text{prodajna cijena} - \text{troškovi}$

(maksimum funkcije cilja)

$$F_{C \text{ MAX}} = 4,5 \cdot (S_1 + S_2) - (1,8 \cdot S_1 + 3,15 \cdot S_2) =$$

$$4,5 \cdot S_1 + 4,5 \cdot S_2 - 1,8 \cdot S_1 - 3,15 \cdot S_2$$

$$F_{C \text{ MAX}} = 2,7 \cdot S_1 + 1,35 \cdot S_2$$

OGRANIČENJA

Masnoća $\geq 0,1$ (10%)

Pepeo $\leq 0,03$ (3%)

Zalihe:

$S_1 \leq 800$

$S_2 \leq 600$

MODEL OGRANIČENJA

1. $0,08 \cdot S_1 + 0,12 \cdot S_2 \geq 0,1(S_1 + S_2)$

$$0,08 \cdot S_1 - 0,1S_1 + 0,12 \cdot S_2 - 0,1 \cdot S_2 \geq 0$$

$$-0,02 \cdot S_1 + 0,02 \cdot S_2 \geq 0 \quad / \cdot (-50)$$

$$\mathbf{S_1 - S_2 \leq 0} \quad (S1=0, S2 \geq 0; \quad S1=500, S2 \geq 500)$$

2. $0,02 \cdot S_1 + 0,035 \cdot S_2 \leq 0,03(S_1 + S_2)$

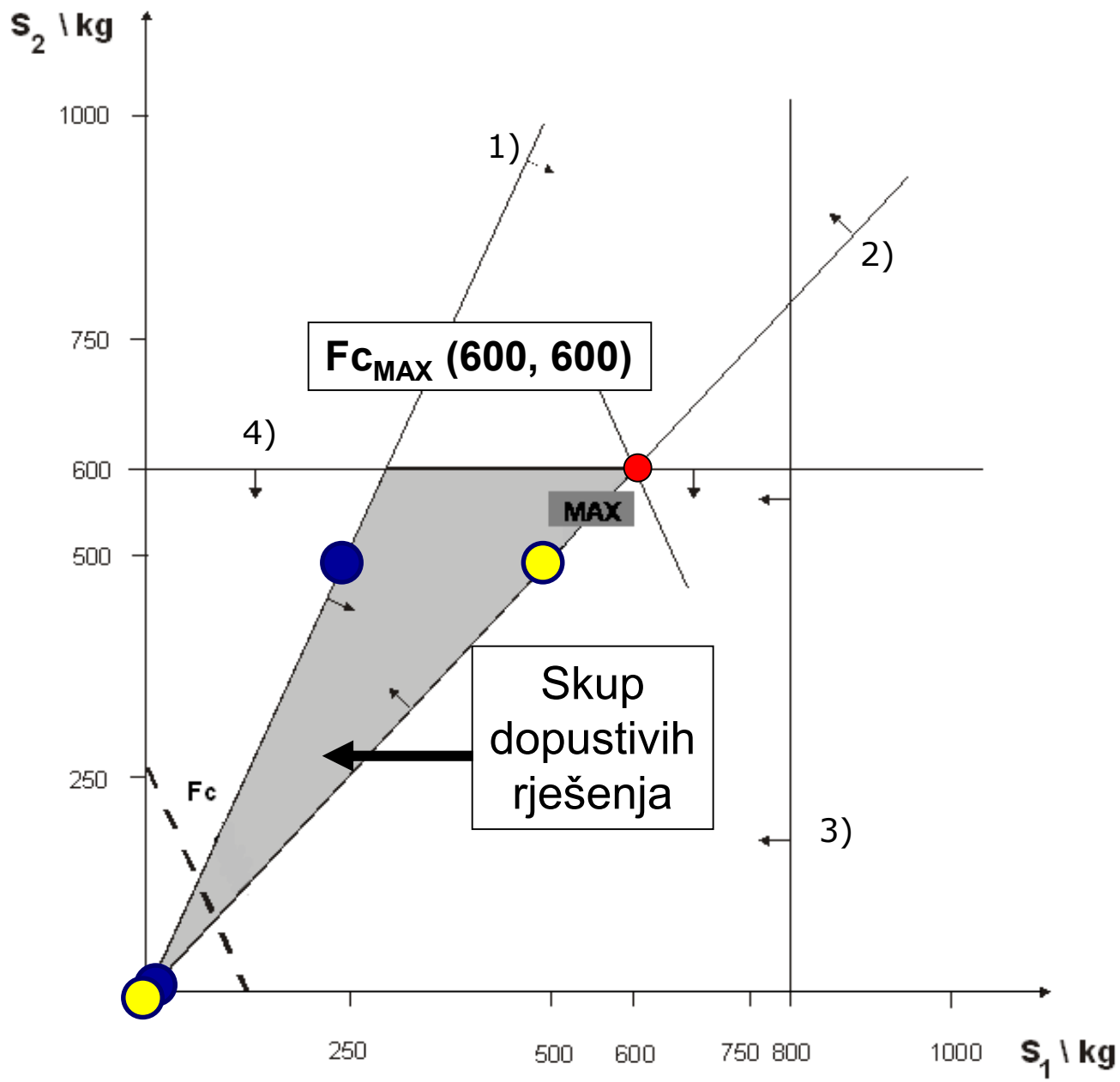
$$0,02 \cdot S_1 - 0,03 \cdot S_1 + 0,035 \cdot S_2 - 0,03 \cdot S_2 \leq 0$$

$$-0,01 \cdot S_1 + 0,005 \cdot S_2 \leq 0 \quad / \cdot (-200)$$

$$\mathbf{2 \cdot S_1 - S_2 \geq 0} \quad (S1 \geq 0, S2=0; \quad S1 \geq 250, S2=500)$$

3. $\mathbf{S_1 \leq 800}$ $(S1 \leq 800, S2=0; \quad S1 \leq 800, S2=500)$

4. $\mathbf{S_2 \leq 600}$ $(S1=0, S2 \leq 600; \quad S1=500, S2 \leq 600)$



$$\begin{aligned} F_{C \text{ MAX}} &= 2,7 \cdot S_1 + 1,35 \cdot S_2 = 2,7 \cdot \underline{600} + 1,35 \cdot \underline{600} \\ &= 2430 \text{ kn/1200 kg} \\ &= 2,025 \text{ kn/kg} \end{aligned}$$

ZAKLJUČAK:

Optimalan sastav smjese sirovina S_1 i S_2 , koji zadovoljava sva ograničenja bit će pripremljen sa 600 kg sirovine S_1 i 600 kilograma sirovine S_2 .

Pri takvom sastavu moguće je prodajom ostvariti maksimalnu dobit od 2430 kn za 1200 kg smjese što je 2,025 kn/kg prodane smjese.

Primjer korištenja računalnog programa LINDO ver. 6.0 !

LINDO ver. 6.0

(LINDO Systems, Inc. , Chicago, USA)

MAX 2.7S1+1.35S2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) **2430.000**

SUBJECT TO

2S1-S2>=0

S1-S2<=0

S1<=800

S2<=600

END

VARIABLE

VALUE

S1

600.000000

S2

600.000000



Primjer 2.

Optimiranje sastava i cijene obroka

Namirnica		Bjelančevine		Masnoće	Ugljikohidrati	Cijena (kn/kg)
		Životinjske	Biljne			
x1	mast			1,00		10,0
x2	ulje			1,00		12,0
x3	meso	0,20		0,08		30,0
x4	mlijeko	0,03		0,04	0,05	6,0
x5	šećer				1,00	7,0
x6	riža		0,08	0,02	0,78	5,0
x7	brašno		0,12	0,02	0,72	4,0
x8	grah		0,24	0,02	0,47	15,0
x9	krumpir		0,02		0,19	2,0

MODEL FUNKCIJE CILJA

$$F_{C_{\text{MIN}}} = 10 \cdot x_1 + 12 \cdot x_2 + 30 \cdot x_3 + 6 \cdot x_4 + 7 \cdot x_5 + 5 \cdot x_6 + 4 \cdot x_7 + 15 \cdot x_8 + 2 \cdot x_9$$

OGRANIČENJA

- Minimalna količina mesa u obroku smije biti 0.3 kg
- Minimalna količina bjelančevina životinjskog podrijetla mora biti 0.028 kg
- Minimalna količina bjelančevina biljnog podrijetla mora biti 0.037 kg
- Minimalna količina ugljikohidrata mora biti 0.424 kg
- Maksimalna količina masnoća smije biti 0.1 kg

MODEL OGRANIČENJA

$$1) x_3 \geq 0.3$$

$$2) 0.2 x_3 + 0.03 x_4 \geq 0.028$$

$$3) 0.08 x_6 + 0.12 x_7 + 0.24 x_8 + 0.02 x_9 \geq 0.037$$

$$4) 0.05 x_4 + x_5 + 0.78 x_6 + 0.72 x_7 + 0.48 x_8 + 0.19 x_9 \geq 0.424$$

$$5) x_1 + x_2 + 0.08 x_3 + 0.04 x_4 + 0.02 x_6 + 0.02 x_7 + 0.02 x_8 \leq 0.1$$

Primjer korištenja računalnog programa LINDO ver. 6.0 !

! Optimiranje sastava obroka

MIN $10X_1 + 12X_2 + 30X_3 + 6X_4 + 7X_5 + 5X_6 + 4X_7 + 15X_8 + 2X_9$

SUBJECT TO

$0X_1 + 0X_2 + 1X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0X_6 + 0X_7 + 0X_8 + 0X_9 \geq 0.3$

$0X_1 + 0X_2 + 0.2X_3 + 0.03X_4 + 0X_5 + 0X_6 + 0X_7 + 0X_8 + 0X_9 \geq 0.028$

$0X_1 + 0X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0.08X_6 + 0.12X_7 + 0.24X_8 + 0.02X_9 \geq 0.037$

$1X_1 + 1X_2 + 0.08X_3 + 0.04X_4 + 0X_5 + 0.06X_6 + 0.02X_7 + 0.02X_8 + 0X_9 \leq 0.1$

$0X_1 + 0X_2 + 0X_3 + 0.05X_4 + 1X_5 + 0.78X_6 + 0.72X_7 + 0.48X_8 + 0.19X_9 \geq 0.424$

END

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 4

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

Funkcija cilja (MIN) = 11.35556

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	0.000000	10.000000
X2	0.000000	12.000000
X3	0.300000	0.000000
X4	0.000000	5.722222
X5	0.000000	1.444444
X6	0.000000	0.777778
X7	0.588889	0.000000
X8	0.000000	12.333333
X9	0.000000	0.944444

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	-30.000000
3)	0.032000	0.000000
4)	0.033667	0.000000
5)	0.064222	0.000000
6)	0.000000	-5.555555

NO. ITERATIONS= 4

ZAKLJUČAK:

Optimalan obrok, koji po svom sastavu zadovoljava sva zadana ograničenja, sastoji se od 300 g mesa i 589 g brašna.

Najniža cijena za pripremu 889 g obroka je 11,35556 kn.

NAPOMENA:

Algoritam je odredio sva matematička rješenja koja zadovoljavaju postavljena ograničenja i odabrao rješenje s najnižom vrijednošću Funkcije cilja.

Sastav obroka i organoleptička svojstva nisu bila uvjetovana !



Primjer 3.

Optimiranje jelovnika za djevojke i mladiće

Komponente obroka	Varijable	Energija (kJ)	Proteini (g)	Masti (g)	Ca (mg)	Fe (mg)	Vit. C (mg)	Cijena (kn)
Doručak 1 <i>Cornflakes, mlijeko</i>	d1	2050	6	3	350	4	3	3,0
Doručak 2 <i>pašteta, kruh, kakao</i>	d2	2136	8	7	369	6	2	3,8
Juha 1 <i>juha od rajčice</i>	x1	836	7	5	92	3	9	2,7
Juha 2 <i>juha od povrća</i>	x2	820	4	6	63	3	15	2,7
Prilog 1 <i>riža</i>	x3	1797	6	4	51	1	35	4,5
Prilog 2 <i>krumpir pire</i>	x4	1987	6	6	13	-	-	5,1
Govedina u umaku	x5	2430	20	29	60	5	10	5,7
Pljeskavica	x6	2900	28	39	34	2	5	6,9
Desert 1 <i>naranča</i>	x7	526	1	-	63	1	77	0,6
Desert 2 <i>puding</i>	x8	883	3	3	31	-	-	1,2
Desert 3 <i>kompot</i>	x9	1053	2	5	18	1	22	1,8
Desert 4 <i>pita od sira</i>	x10	2160	21	6	84	3	-	2
Večera 1 <i>hrenovke, kruh, senf</i>	v1	2898	12	16	25	2	3	5,6
Večera 2 <i>krafne, jogurt</i>	v2	2299	6	13	554	3	1	4,5

OGRANIČENJA

(prema RDA preporukama)

Maksimalna količina masti	(Ž: 70 g;	M: 96 g)
Minimalna količina energije u jelovniku	(Ž: 8280 kJ;	M: 10915 kJ)
Maksimalna količina energije u jelovniku	(Ž: 10120 kJ;	M: 13340 kJ)
Minimalna količina proteina	(Ž: 46 g;	M: 58 g)
Minimalna količina kalcija	(Ž: 1100 mg;	M: 1100 mg)
Minimalna količina željeza	(Ž: 15 mg;	M: 10 mg)
Minimalna količina vitamina C	(Ž: 60 mg;	M: 60 mg)
Od dva ponuđena doručka treba izabrati samo jedan	$(d_1 + d_2 = 1)$	
Od dvije ponuđene juhe treba izabrati samo jednu	$(x_1 + x_2 = 1)$	
Od dva ponuđena priloga treba izabrati samo jedan	$(x_3 + x_4 = 1)$	
Od dva glavna jela treba izabrati samo jedno	$(x_5 + x_6 = 1)$	
Od četiri ponuđena deserta treba izabrati samo jedan	$(x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 1)$	
Od dvije ponuđene večere treba izabrati samo jednu	$(v_1 + v_2 = 1)$	
Varijable trebaju biti cijeli brojevi	(integer)	

MIN

$3.0d_1+3.8d_2+2.7x_1+2.7x_2+4.5x_3+5.1x_4+5.7x_5+6.9x_6+0.6x_7+1.2x_8+1.8x_9+2x_{10}+5.6v_1+4.5v_2$

SUBJECT TO

$3d_1+7d_2+5x_1+6x_2+4x_3+6x_4+29x_5+39x_6+3x_8+5x_9+6x_{10}+16v_1+13v_2 \leq 70$

$2050d_1+2136d_2+836x_1+820x_2+1797x_3+1987x_4+2430x_5+2900x_6+526x_7+883x_8+1053x_9+2160x_{10}+2898v_1+2299v_2 \geq 8280$

$2050d_1+2136d_2+836x_1+820x_2+1797x_3+1987x_4+2430x_5+2900x_6+526x_7+883x_8+1053x_9+2160x_{10}+2898v_1+2299v_2 \leq 10120$

$6d_1+8d_2+7x_1+4x_2+6x_3+6x_4+20x_5+28x_6+1x_7+3x_8+2x_9+21x_{10}+12v_1+6v_2 \geq 46$

$350d_1+369d_2+92x_1+63x_2+51x_3+13x_4+60x_5+34x_6+63x_7+31x_8+18x_9+84x_{10}+25v_1+554v_2 \geq 1100$

$4d_1+6d_2+3x_1+3x_2+1x_3+5x_5+2x_6+1x_7+1x_9+3x_{10}+2v_1+3v_2 \geq 15$

$3d_1+2d_2+9x_1+15x_2+35x_3+10x_5+5x_6+77x_7+22x_9+3v_1+1v_2 \geq 60$

$d_1+d_2=1$

$x_1+x_2=1$

$x_3+x_4=1$

$x_5+x_6=1$

$x_7+x_8+x_9+x_{10}=1$

$v_1+v_2=1$

END

int d1: int d2

int x1: int x2: int x3: int x4: int x5: int x6: int x7: int x8: int x9: int x10

OBJECTIVE FUNCTION VALUE = **21.00000**

VARIABLE	VALUE
D1	1.000000
D2	0.000000
X1	1.000000
X2	0.000000
X3	1.000000
X4	0.000000
X5	1.000000
X6	0.000000
X7	1.000000
X8	0.000000
X9	0.000000
X10	0.000000
V1	0.000000
V2	1.000000

Minimalna cijena obroka za djevojke = 21,00 kn

d_1	d_2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_0	v_1	v_2
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1

Nutritivni sastav

Energija (kJ)	Proteini (g)	Mast (g)	Ca (mg)	Fe (mg)	Vitamin C (mg)
9938	46	54	1170	17	135

Maksimalna cijena obroka za djevojke = 21,80 kn

d_1	d_2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_0	v_1	v_2
0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1

Nutritivni sastav

Energija (kJ)	Proteini (g)	Mast (g)	Ca (mg)	Fe (mg)	Vitamin C (mg)
10024	48	58	1189	19	134

Minimalna cijena obroka za mladiće = 22,40 Kn

d_1	d_2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_0	v_1	v_2
1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1

Nutritivni sastav

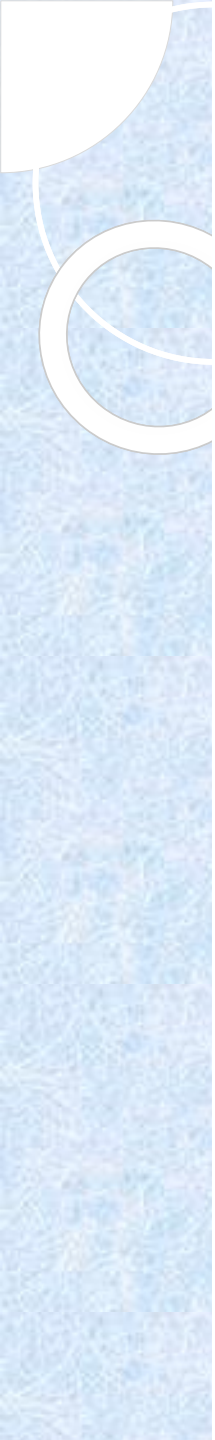
Energija (kJ)	Proteini (g)	Mast (g)	Ca (mg)	Fe (mg)	Vitamin C (mg)
11556	63	61	1162	19	64

Maksimalna cijena obroka za mladiće = 23,20 Kn

d_1	d_2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_0	v_1	v_2
0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1

Nutritivni sastav

Energija (kJ)	Proteini (g)	Mast (g)	Ca (mg)	Fe (mg)	Vitamin C (mg)
11642	65	65	1181	21	63



Primjer 4.

Optimiranje plana proizvodnje

	Jogurt (X_1)	Acidofil (X_2)	KAPACITET ($h\ dan^{-1}$)
Priprema ($h\ dan^{-1}$)	1.2	0.8	23
Fermentacija ($h\ dan^{-1}$)	3.5	4.5	22
Pakiranje ($h\ dan^{-1}$)	2.5	2.2	20
TROŠKOVI ($kn\ t^{-1}$)	4000	6000	
CIJENA ($kn\ t^{-1}$)	7500	11000	
MIN. KOLIČINE (t)	1	2	
OPTIMALNI PLAN (t)	?	?	

MODEL FUNKCIJE CILJA

$F_{C_{MAX}} = \text{profit} = \text{CIJENA} - \text{TROŠKOVI}$

Pretpostavimo da je $F = 15750$

$$F_{C_{MAX}} = (7500 X_1 + 11000 X_2) - (4000 X_1 + 6000 X_2)$$

$$F = 3500 X_1 + 5000 X_2$$

$$F_{C_{MAX}} = 3500 X_1 + 5000 X_2$$

$$(X_2=0, X_1=5); (X_1=0, X_2=3.5)$$

MODEL OGRANIČENJA

1. $1.2 X_1 + 0.8 X_2 \leq 23$

2. $3.5 X_1 + 4.5 X_2 \leq 22$

3. $2.5 X_1 + 2.0 X_2 \leq 20$

4. $X_1 \geq 1$

5. $X_2 \geq 2$

1. $1.2 X_1 + 0.8 X_2 \leq 23$

$$X_1 \leq 19.167 - 0.667 X_2$$

$$(X_2=0, X_1 \leq 19.167); (X_2=10, X_1 \leq 12.497)$$

2. $3.5 X_1 + 4.5 X_2 \leq 22$

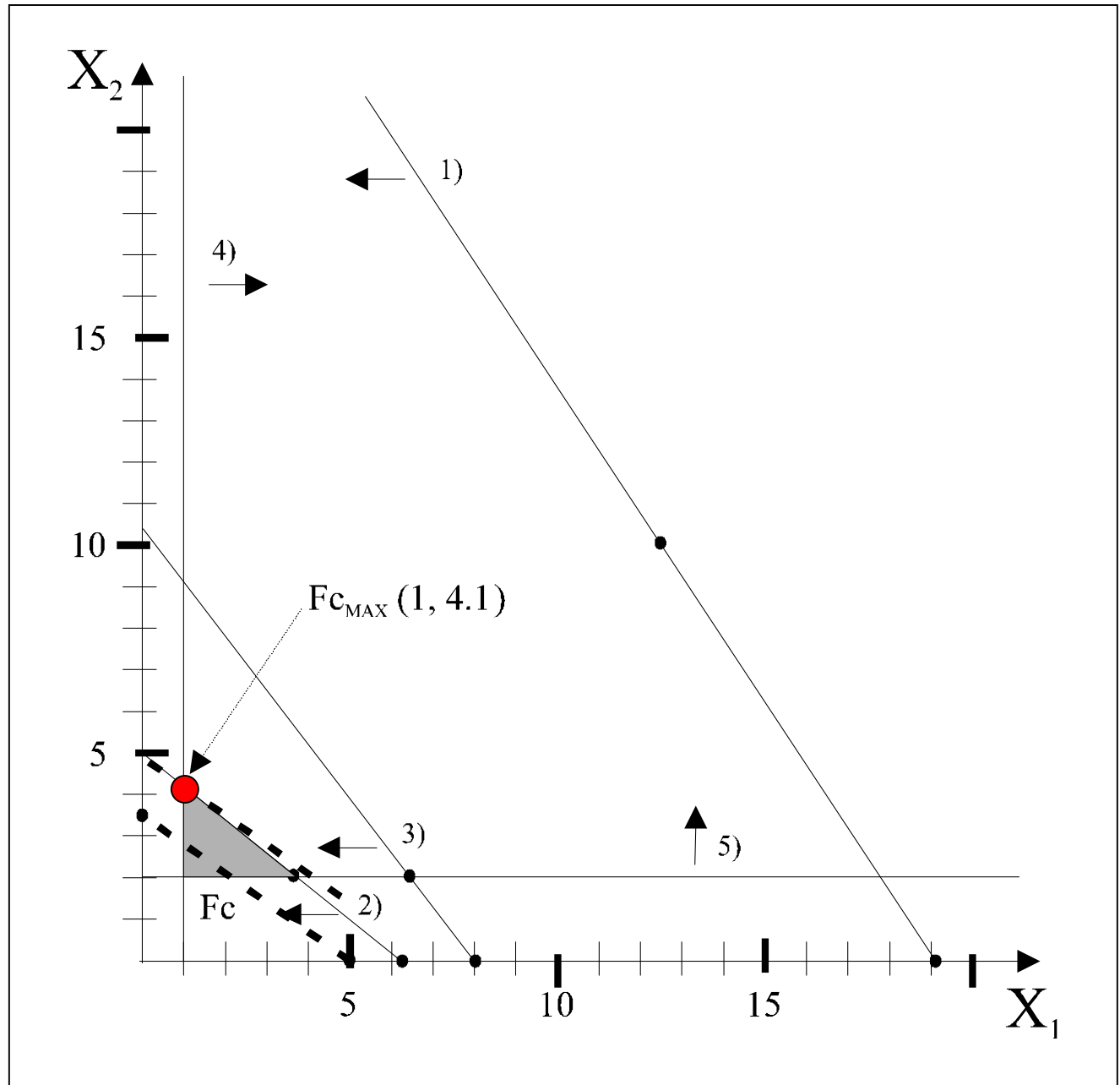
$$X_1 \leq 6.286 - 1.286 X_2$$

$$(X_2=0, X_1 \leq 6.286); (X_2=2, X_1 \leq 3.714)$$

3. $2.5 X_1 + 2.0 X_2 \leq 20$

$$X_1 \leq 8 - 0.8 X_2$$

$$(X_2=0, X_1 \leq 8) (X_2=2, X_1 \leq 6.4)$$



$$F_{C_{MAX}} = 3500 X_1 + 5000 X_2 = 3500 \cdot 1 + 5000 \cdot 4.1 = 24000 \text{ kn}$$

Maksimalan profit uz optimalno iskorištenje pogona je 24000 kuna, a proizvede se 1 tona jogurta (X_1) i 4.1 tona acidofila (X_2).

Provjera rješenja:

- | | | | |
|----|-------------------------------|------------------|---|
| 1) | $X_1 \leq 19.167 - 0.667 X_2$ | $1 \leq 16.4323$ | ✓ |
| 2) | $X_1 \leq 6.286 - 1.286 X_2$ | $1 \leq 1.0134$ | ✓ |
| 3) | $X_1 \leq 8 - 0.8 X_2$ | $1 \leq 4.72$ | ✓ |
| 4) | $X_1 \geq 1$ | $1 \geq 1$ | ✓ |
| 5) | $X_2 \geq 2$ | $4.1 \geq 2$ | ✓ |

LINDO ver. 6.0

(LINDO Systems, Inc. , Chicago, USA)

MAX 3500x1+5000x2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

SUBJECT TO

1) **24055.55**

$$1.2x_1 + 0.8x_2 \leq 23$$

$$3.5x_1 + 4.5x_2 \leq 22$$

$$2.5x_1 + 2x_2 \leq 20$$

$$x_1 \geq 1$$

$$x_2 \geq 2$$

END

VARIABLE VALUE

X1 1.000000

X2 4.111111



Primjer 5.

Optimiranje prijevoza robe
iz tri tvornice na četiri prodajna mjesta

Optimiranje prijevoza gotovog proizvoda od tvornice do tržišta

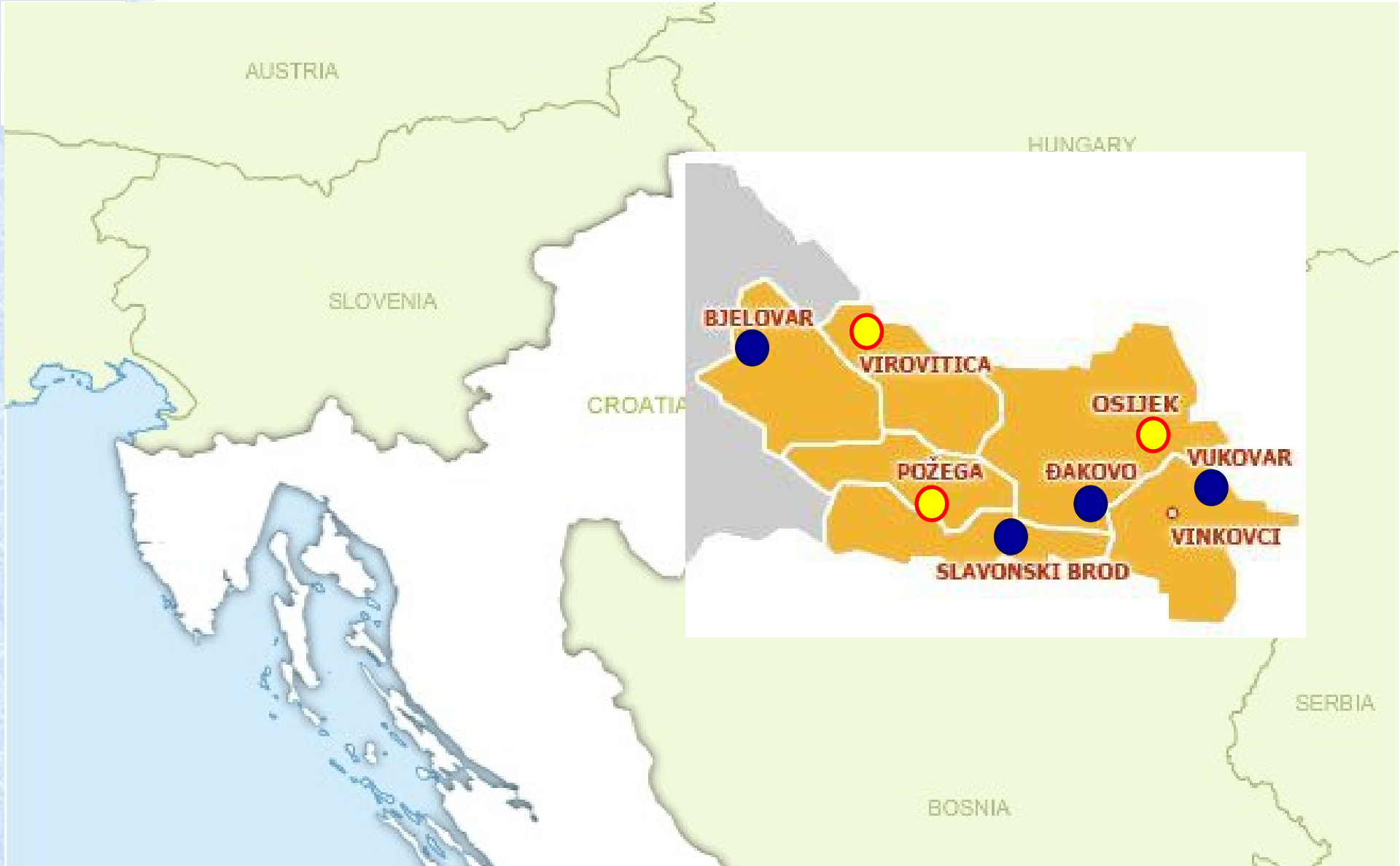
PRIMJER 1.

U regiji koju snabdijeva proizvodima proizvođač ima tri tvornice (T) i četiri prodajna mjesta (P).

Treba optimirati prijevoz gotovih proizvoda tako da svako tržište dobije potrebnu količinu proizvoda, a da troškovi prijevoza budu najmanji (MIN Fc).

Tvornice su označene oznakama T1, T2 T3.

Prodajna mjesta (tržišta) označena su oznakama P1, P2, P3 i P4.



AUSTRIA

HUNGARY

SLOVENIA

CROATIA

SERBIA

BOSNIA

BJELOVAR

VIROVITICA

OSIJEK

POŽEGA

ĐAKOVO

VUKOVAR

SLAVONSKI BROD

VINKOVCI

Tvornica T1 dnevno može proizvesti 10 tona proizvoda.

Tvornica T2 dnevno može proizvesti 12 tona proizvoda.

Tvornica T2 dnevno može proizvesti 17 tona proizvoda.

Kapaciteti tvornica T1, T2 i T3 ($t \text{ dan}^{-1}$)

	Kapacitet <i>(t dan⁻¹)</i>
T1	10
T2	12
T3	17
Σ	39

Prodajno mjesto P1 dnevno treba najmanje 4 tone proizvoda.
Prodajno mjesto P2 dnevno treba najmanje 8 tona proizvoda.
Prodajno mjesto P3 dnevno treba najmanje 9 tona proizvoda.
Prodajno mjesto P4 dnevno treba najmanje 12 tona proizvoda.

Prodajno mjesto P1 dnevno treba najviše 5 tona proizvoda.
Prodajno mjesto P2 dnevno treba najviše 10 tona proizvoda.
Prodajno mjesto P3 dnevno treba najviše 10 tona proizvoda.
Prodajno mjesto P4 dnevno treba najviše 13 tona proizvoda.

PRODAJNO MJESTO	MINIMALNO <i>(t dan⁻¹)</i>	MAKSIMALNO <i>(t dan⁻¹)</i>
P1	4	5
P2	8	10
P3	9	10
P4	12	13
Σ	33	38

Cijena prijevoza od tvornice T1 do prodajnog mjesta P1 je 4 kn t⁻¹.

Cijena prijevoza od tvornice T1 do prodajnog mjesta P2 je 2 kn t⁻¹.

Cijena prijevoza od tvornice T1 do prodajnog mjesta P3 je 3 kn t⁻¹.

Cijena prijevoza od tvornice T1 do prodajnog mjesta P4 je 1 kn t⁻¹.

Cijena prijevoza od tvornice T2 do prodajnog mjesta P1 je 3 kn t⁻¹.

...

Cijene prijevoza od tvornice do tržišta (kn t⁻¹)

	P1	P2	P3	P4
T1	4	2	3	1
T2	3	3	5	7
T3	5	4	7	4

Rješenje primjenom programa LINDO

MIN 4 X11+2 X12+3 X13+ X14+
+3 X21+3 X22+5 X23+7 X24+
+5 X31+4 X32+7 X33+4 X34

SUBJECT TO

X11+ X12+ X13+ X14<=10

X21+ X22+ X23+ X24<=12

X31+ X32+ X33+ X34<=17

X11+ X21+ X31>=4

X12+ X22+ X32>=8

X13+ X23+ X33>=9

X14+ X24+ X34>=12

X11+ X21+ X31<=5

X12+ X22+ X32<=10

X13+ X23+ X33<=10

X14+ X24+ X34<=13

END

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 108.0000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X11	0.000000	3.000000
X12	0.000000	1.000000
X13	9.000000	0.000000
X14	1.000000	0.000000
X21	4.000000	0.000000
X22	0.000000	0.000000
X23	8.000000	0.000000
X24	0.000000	4.000000
X31	0.000000	1.000000
X32	8.000000	0.000000
X33	0.000000	1.000000
X34	3.000000	0.000000

Najmanje dnevne količine za isporuku

	P1	P2	P3	P4	Ukupno	kapacitet
T1			1	9	10	10
T2	4		8		12	12
T3		8		3	11	17
MIN	4	8	9	12	33	39

Da bi bile zadovoljene najmanje dnevne potrebe prodajnih mjesta potrebno je:

- iz tvornice T1 odvesti 9 t proizvoda na prodajno mjesto P3 i 1 t proizvoda na prodajno mjesto P4,
- iz tvornice T2 odvesti 4 t proizvoda na prodajno mjesto P1 i 8 t proizvoda na prodajno mjesto P2,
- iz tvornice T3 odvesti 8 t proizvoda na prodajno mjesto P2 i 3 t proizvoda na prodajno mjesto P4.

Izračunata je vrijednost Funkcije cilja $F_c = 108$ kn i to su najmanji mogući dnevni troškovi prijevoza naručene količine robe

Najveće dnevne količine za isporuku

	P1	P2	P3	P4	ukupno	kapacitet
T1	5	4			9	10
T2				12	12	12
T3		6	10	1	17	17
MA X	5	10	10	13	38	39

Za najveće dnevne potrebe prodajnih mjesta potrebno je:

- iz tvornice T1 odvesti 5 t proizvoda na prodajno mjesto P1 i 4 t proizvoda na prodajno mjesto P2,
- iz tvornice T2 odvesti 12 t proizvoda na prodajno mjesto P4,
- iz tvornice T3 odvesti 6 t proizvoda na prodajno mjesto P2, 10 t proizvoda na prodajno mjesto P3 i 1 t proizvoda na prodajno mjesto P4.

Izračunata je vrijednost Funkcije cilja $F_c = 210$ kn i to su najveći mogući dnevni troškovi prijevoza naručene količine robe.